

4.2.20 Slovní úlohy - shrnutí

Předpoklady: 040219

Př. 1: Projdi si hodiny, ve kterých jsme se věnovali slovním úlohám. Jaké speciální typy úloh jsme řešili? Jaké postupy a triky jsme při tom používali? Na co jsme si měli dávat pozor?

Obecný postup řešení slovních úloh:

- zvolíme neznámou (více neznámých),
- postupně zapíšeme údaje ze zadání pomocí neznámých tak, abychom získali jednu rovnici o jedné neznámé,
- rovnici vyřešíme.

Triky: Každé číslo v zadání většinou umožňuje zapsat jednu rovnici nebo jeden vztah. Nebojíme se většího počtu neznámých, časem se jich zbavíme. Nesnažíme se všechno zapsat najednou.

Slovní úlohy o směsích

- sestavujeme rovnici, která sleduje obsah čisté látky před a po smíchání,
- členy této rovnice mají tvar: *množství · koncentrace*.

Pozor: čistá látka má koncentraci $100\% = 1$, ředidlo má koncentraci 0.

Triky: můžeme sestavovat rovnici i pro čisté ředidlo

Slovní úlohy o společné práci

- napíšeme výraz, který udává množství práce vykonané za jednotku času,
- pomocí těchto výrazů násobených časem sestavíme rovnici, která popisuje, jak se postupně vykoná potřebná práce.

Pozor: Je nutné používat stejné jednotky (například pořád hodiny)

Slovní úlohy o pohybu

- zapíšeme rovnici, která v libovolné ze tří veličin (s, v, t) popisuje pohyb jako celek,
- do rovnice dosadíme pomocí jednoho ze vzorců $s = vt, v = \frac{s}{t}, t = \frac{s}{v}$,
- dosadíme, co známe,
- zmenšíme počet neznámých,
- vyřešíme rovnici.

Pozor: Je nutné používat slučitelné jednotky (například km/h a h)

Trik: Základní rovnice by měla popisovat pohyb jako celek, často je víc možností, většinou neobsahuje více údajů přímo uvedených v zadání.

Př. 2: Eliška vlastní čtvercový pozemek, který byl v rámci pozemkových úprav upraven tak, že se jedna strana zvětšila o 2 m, zatímco druhá se zkrátila o 1 m, čímž se plocha pozemku zvětšila o 25 m^2 . Urči původní i pozměněné rozměry pozemku.

Původní rozměry pozemku ... x

Původní plocha pozemku ... $S_p = x^2$

Rozměry pozemku po změně ... $(x+2), (x-1)$
 Plocha pozemku po změně ... $S_n = (x+2) \cdot (x-1)$

Plocha se zvětšila o 25 m^2 : $S_p + 25 = S_n$

$$x^2 + 25 = (x+2) \cdot (x-1)$$

$$x^2 + 25 = x^2 + 2x - x - 2 \quad / -x^2 + 2$$

$$27 = x$$

Pozemek měl původně rozměry $27 \text{ m} \times 27 \text{ m}$, po změně měl rozměry $29 \text{ m} \times 26 \text{ m}$.

Př. 3: V trojúhelníku je výška o pětinu kratší než její základna. Urči obě délky, jestliže obsah trojúhelníku je 90 cm^2 .

Délka základny ... a

Délka výšky $v_a = a - \frac{1}{5}a = \frac{4}{5}a$

Obsah trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = 90$

$$\frac{a \cdot \frac{4}{5}a}{2} = 90 \quad / \cdot 2$$

$$a \cdot \frac{4}{5}a = 90 \cdot 2 \quad / : 4$$

$$a^2 = \frac{90 \cdot 2 \cdot 5}{4} = 45 \cdot 5 = 9 \cdot 5 \cdot 5$$

$$a = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 5} = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}$$

$$v = \frac{4}{5}a = \frac{4}{5} \cdot 15 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

Základna trojúhelníku má délku 15 cm , výška na ni kolmá 12 cm .

Př. 4: Kolika procentní roztok lihu potřebujeme dolít k $0,2 \text{ hl}$ 40% roztoku lihu, abychom získali $0,3 \text{ hl}$ 32% roztoku?

Množství čistého lihu v prvním roztoku ... $0,2 \cdot 0,4$

Množství čistého lihu v druhém roztoku ... $x \cdot 0,1$ (výsledného roztoku má být $0,3 \text{ hl}$)

Množství čistého lihu ve výsledném roztoku ... $0,32 \cdot 0,3$

$$0,2 \cdot 0,4 + x \cdot 0,1 = 0,32 \cdot 0,3$$

$$0,08 + x \cdot 0,1 = 0,096 \quad / -0,08$$

$$x \cdot 0,1 = 0,016 \quad / : 0,1$$

$$x = 0,16$$

K původnímu roztoku potřebujeme dolít $0,1 \text{ hl}$ 16% roztoku.

Př. 5: Hasiči při vyčerpávání použili dvě čerpadla. Jako první spustili čerpadlo o větším výkonu, jako druhé o pět minut později čerpadlo s výkonem o $1,4 \text{ m}^3/\text{min}$ menším, takže 30 minut po začátku akce bylo všech 97 m^3 ze sklepa vyčerpáno. Urči výkony obou čerpadel v m^3/min .

$$\begin{aligned} \text{Výkon prvního čerpadla} & \dots x \text{ m}^3/\text{min} \\ \text{Výkon druhého o } 1,4 \text{ m}^3/\text{min} \text{ menší} & \dots x - 1,4 \text{ m}^3/\text{min} \\ \text{Voda vyčerpaná 1. čerpadlem} & \dots x \cdot 30 \\ \text{Voda vyčerpaná 2. čerpadlem (čerpal o 5 minut později)} & \dots (x - 1,4) \cdot 25 \\ \text{Vyčerpáno } 97 \text{ m}^3 & \dots x \cdot 30 + (x - 1,4) \cdot 25 = 97 \\ x \cdot 30 + 25x - 35 = 97 & \quad / +35 \\ 55x = 132 & \quad / :55 \\ x = 2,4 & \end{aligned}$$

První čerpadlo má výkon $2,4 \text{ m}^3/\text{min}$, druhé $1 \text{ m}^3/\text{min}$.

Př. 6: Když se Achilles dozvěděl o tom, že Zenon z Eleje všude vykládá, že nemůže předhonorit želvu, pěkně se namíchl a rozhodl se všem dokázat, že to není pravda. Chytil želvu, strčil ji do pytle a objížděl s ní řecká města. Aby se neřeklo, vždy jí dal nejen 100 m náskok, ale navíc pokaždé vyrazil ještě o 100 sekund později. Za jak dlouho a jak daleko od místa, odkud vyrazil, Achilles běžící rychlostí $9,8 \text{ m/s}$ želvu plazící se rychlostí $0,3 \text{ m/s}$ dohonil?

Ve chvíli, kdy Achilles želvu dohonil, uběhl o 100 m (želvy náskok) víc: $s_A = s_Z + 100$.

Dosadíme $s = vt$: $v_A t_A = v_Z t_Z + 100$.

Dosadíme známé hodnoty: $9,8 \cdot t_A = 0,3 \cdot t_Z + 100$.

Vyjádríme čas běhu želvy pomocí času Achillea (vyrazil o 100 s později): $t_Z = t_A + 100$.

$$9,8 \cdot t_A = 0,3 \cdot (t_A + 100) + 100$$

$$9,8 \cdot t_A = 0,3 \cdot t_A + 30 + 100 \quad / -0,3t_A$$

$$9,5 \cdot t_A = 130 \quad / :9,5$$

$$t_A = 13,7 \text{ s}$$

$$s_A = v_A t_A = 9,8 \cdot 13,7 \text{ m} = 134 \text{ m}$$

Achilles dohonil želvu po 13,7 s ve vzdálenosti 134 m.

Př. 7: Při hašení požáru plnili hasiči cisternu pomocí dvou čerpadel. Když zapojili rychlejší čerpadlo o půl minuty později než pomalejší, trvalo ještě 2 minuty, než se cisterna oběma čerpadly naplnila. Jak dlouho by trvalo naplnit cisternu samotným pomalejším čerpadlem, jestliže rychlejším by se cisterna naplnila o 1 minutu rychleji?

Pomalejší čerpadlo ... x min \Rightarrow 1 minuta ... $\frac{1}{x}$ cisterny

Rychlejší čerpadlo ... $x-1$ min \Rightarrow 1 minuta ... $\frac{1}{x-1}$ cisterny

$$2,5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x-1} = 1 \quad / \cdot x \cdot (x-1) \cdot 2$$

$$5(x-1) + 4x = 2x(x-1)$$

$$5x - 5 + 4x = 2x^2 - 2x$$

$$0 = 2x^2 - 11x + 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{11+9}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \text{rychlejší čerpadlo by načerpalo cisternu za 4 minuty)}$$

$$x_2 = \frac{11-9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ (nemá smysl, rychlejší čerpadlo by načerpalo cisternu za -0,5 minuty)}$$

Samotným pomalejším čerpadlem by se cisterna napustila za 5 minut.

Př. 8: K 6 litrům roztoku frutolainu o neznámé koncentraci jsme přilili 2 litry čisté vody, čímž koncentrace roztoku klesla o 20 %. Jaká byla původní a konečná koncentrace?

Množství frutolainu v prvním roztoku ... $x \cdot 6$

Množství v čisté vodě ... $0 \cdot 2$

Množství frutolainu ve výsledném roztoku ... $(x - 0,2) \cdot 8$

$$x \cdot 6 + 0 \cdot 2 = (x - 0,2) \cdot 8$$

$$6x = 8x - 1,6 \quad / -6x + 16$$

$$1,6 = 2x \quad / : 2$$

$$x = 0,8$$

Původní frutolainový roztok měl koncentraci 80 %.

Př. 9: Když o Achilleově turné s želvou dozvěděla řecká pobočka mezinárodní neziskové organizace WUPDLC (World Union for Preservation of Dignity of Living Creatures), nařkla hrdinu z ponižování želv, neboť se s ní poměřoval mimo její přirozené vodní prostředí, a vyzvala všechny slušné lidi k zasílání odsuzujících mailů a pořádání protestních demonstrací. Zasloužilý válečný veterán se nejdříve snažil argumentovat tím, že nezamýšlel ponižovat želvy, jen chtěl dokázat svým spoluobčanům, že Zenon se mýlí. V okamžiku, kdy ho napadlo IPCGU

(International Pacifist Creaturehood for General Understanding) za militaristické opovrhování rovností všech živých tvorů, však hrdina pochopil, že doba se změnila a svolil se uspořádat omluvné turné, ve kterém se snažil dohánět (samozřejmě neúspěšně) želvu ve vodě. Tím trochu smazal své provinění a zasloužil se o částečné uznání nejhorlivějších bojovníků za rovnost a spravedlnost, ale když se Zenon přišel jednou podívat na jeho show „Váleční hrdinové nejsou lepší než želvy“, poznal z jeho výrazu, že úplně šťastný ze svých neustálých porážek není. Změřil si rychlosti obou závodníků ve vodě (Achilles 1,7 m/s, želva 4,2 m/s), vzpomněl si na jejich rychlosti na souši (Achilles 9,8 m/s, želva 0,3 m/s) a vypočítal, jak je nutné rozdělit trasu 1000 m na část na vodě a na souši, aby Achilles i želva měli stejné šance na vítězství. Zopakuj jeho výpočet.

Stejná šance na vítězství: oba uběhnou celou trasu za normálních podmínek za stejný čas:

$$t_{AV} + t_{AS} = t_{ZV} + t_{ZS}$$

$$\text{Dosadíme ze vzorce: } t = \frac{s}{v} : \frac{s_v}{v_{Av}} + \frac{s_s}{v_{As}} = \frac{s_v}{v_{Zv}} + \frac{s_s}{v_{Zs}}$$

$$\text{Dosadíme známé hodnoty: } \frac{s_v}{1,7} + \frac{s_s}{9,8} = \frac{s_v}{4,2} + \frac{s_s}{0,3}$$

$$\text{Obě části trasy dohromady měří 1000 m: } s_v + s_s = 1000 \Rightarrow s_s = 1000 - s_v$$

$$\frac{s_v}{1,7} + \frac{1000 - s_v}{9,8} = \frac{s_v}{4,2} + \frac{1000 - s_v}{0,3} \quad / \cdot 1,7 \cdot 9,8 \cdot 4,2 \cdot 0,3$$

$$9,8 \cdot 4,2 \cdot 0,3 \cdot s_v + 1,7 \cdot 4,2 \cdot 0,3 \cdot (1000 - s_v) = 1,7 \cdot 9,8 \cdot 0,3 \cdot s_v + 1,7 \cdot 9,8 \cdot 4,2 \cdot (1000 - s_v)$$

$$12,348 \cdot s_v + 2,142 \cdot (1000 - s_v) = 4,998 \cdot s_v + 69,972 \cdot (1000 - s_v)$$

$$12,348 \cdot s_v + 2142 - 2,142s_v = 4,998 \cdot s_v + 69972 - 69,972s_v$$

$$10,206 \cdot s_v + 2142 = 69972 - 64,974s_v \quad / +64,974s_v - 2142$$

$$75,18 \cdot s_v = 67830 \quad / : 75,18$$

$$s_v = 902,2 \text{ m}$$

$$s_A = 1000 - s_v = 1000 - 902,2 \text{ m} = 97,8 \text{ m}$$

Achilles i želva budou mít stejné šance na vítězství, pokud 902,2 m trasy bude ve vodě a 97,8 m na souši.

Dodatek: Zenon zaslal výsledky svých výpočtů k uveřejnění do časopisu Supervisor. Redakce jej však nikdy nevydala, naopak otiskla úvodník, ve kterém odsoudila zpátečnickou činnost bigotního lidsky nadřazeného profesůrka, který se snaží bránit narovnání historických křivd mezi živými tvory a člověkem. Krátce po zveřejnění článku se před jeho domem srotila spontánní demonstrace pobouřených občanů, vzduchem zasvištělo pár dlažebních kostek, a když se ke spáleníšti po několika hodinách dostali zabloudivší požárníci, nezbylo než konstatovat, že není co hasit, ani koho zachraňovat. „No, zkazil jsi mně život, ale tohle sis teda nezasloužil“, vzdychnul Achilles a šel se převlíknout do plavek.

Shrnutí: