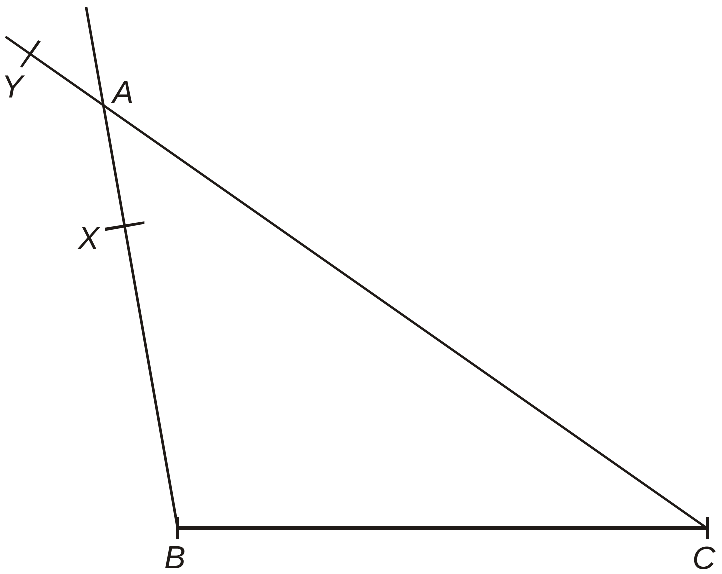
2.4.6 Věta usu

Předpoklady: 020405

Př. 1: Narýsuj trojúhelník *ABC*, $a = 7\,\text{cm}$, $\beta = 100°$, $\gamma = 35°$. Je trojúhelník *ABC* zadán jednoznačně? Zkontroluj se sousedem, zda jsou Vaše trojúhelníky shodné. Zapiš postup konstrukce (postupuj tak, aby strany a úhly konstruoval v pořadí, ve kterém jsou zadány. Využij zápisy konstrukce z minulých dvou hodin).



Během konstrukce jsme měli vždy jen jednu možnost, jak provést každý z kroků $\Rightarrow$ trojúhelník je zadán jednoznačně.

Kontrola: $|AC| = b = 9{,}75\,\text{cm}$, $|BA| = c = 5{,}7\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$.

Všechny správně narýsované trojúhelníky jsou shodné.

Zápis konstrukce:

1. $BC; |BC| = a = 7\,\text{cm}$

2. $\mapsto BX; |\sphericalangle CBX| = \beta = 100°$

3. $\mapsto CY; |\sphericalangle BCY| = \gamma = 35°$

4. $A; A \in \mapsto BX \cap \mapsto CY$

5. $\triangle ABC$

Pedagogická poznámka: Chyby v konstrukci nejsou příliš časté, vyplývají spíše z nepozornosti. Naopak správně napsaný zápis konstrukce je vzácností. Druhý bod zápisu je většinou velmi stručný **2.** $\beta = 100°$. Ukazujeme si, že takový zápis není jednoznačný, protože by umožňoval nakreslit úhel β libovolně s vrcholem v bodu *B*, my však potřebuje zajistit konstrukci, ve které je jedním z ramen úhlu polopřímka *BC*.

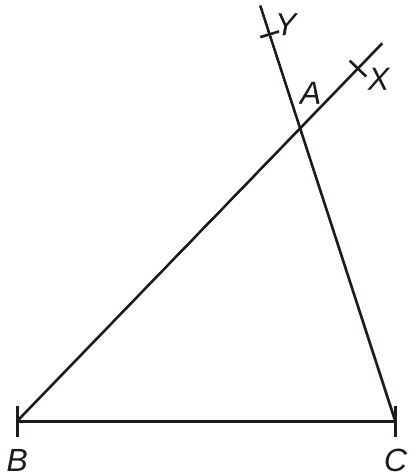
Př. 2: Za jakých podmínek můžeme sestrojit trojúhelník zadaný pomocí věty *usu*?

Součet úhlů v trojúhelníku musí být $180°$ $\Rightarrow$ trojúhelník zadaný větou *usu* můžeme sestrojit, jestliže platí $\alpha+\beta<180°$.

Věta ***usu***: Shodují-li se dva trojúhelníky ve straně a v obou přilehlých úhlech, jsou shodné.

Př. 3: Sestroj trojúhelník *ABC* $a=5\,\text{cm}$, $\alpha=62°$, $\beta=46°$. Zapiš zápis konstrukce.

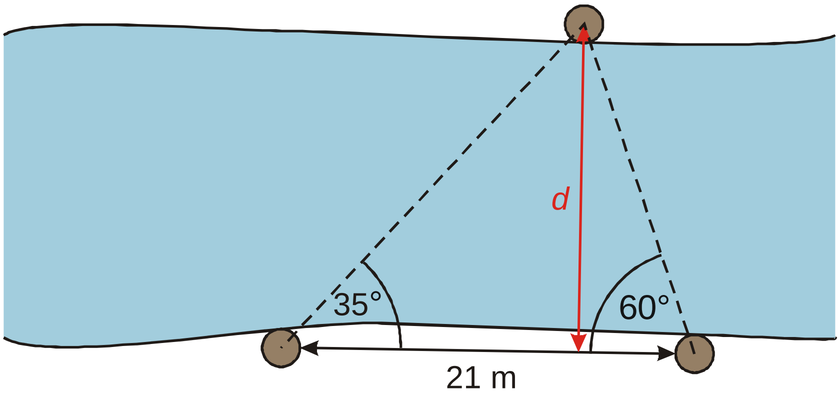
Problém: Známe stranu a $\Rightarrow$ potřebovali bychom znát úhly β a γ. Místo úhlu γ známe úhel α $\Rightarrow$ úhel γ dopočítáme: $\gamma=180°-\alpha-\beta=180°-62°-46°=72°$.
Sestrojujeme trojúhelník: $a=5\,\text{cm}$, $\beta=46°$, $\gamma=72°$.



Zápis konstrukce:
1. $BC;|BC|=a=5\,\text{cm}$
2. $\mapsto BX;|\sphericalangle CBX|=\beta=46°$
3. $\mapsto CY;|\sphericalangle BCY|=\gamma=72°$
4. $A; A\in\mapsto BX\cap\mapsto CY$
5. $\triangle ABC$

Př. 4: Ondra sedí na břehu rozbouřené řeky a přemýšlí, jak se dostane na druhou stranu. Nejdříve potřebuje změřit šířku řeky. Nakonec ho to napadlo. Našel si tří stromy na samém kraji řeky - dva na své straně, jeden na protějším břehu. Vzdálenost stromů na jeho straně byla 21 m. Pak změřil dva úhly $35°$ a $60°$. Jejich vrcholy byly stromy na jeho břehu a ramena určovaly zbývající dva stromy. Urči šířku řeky.

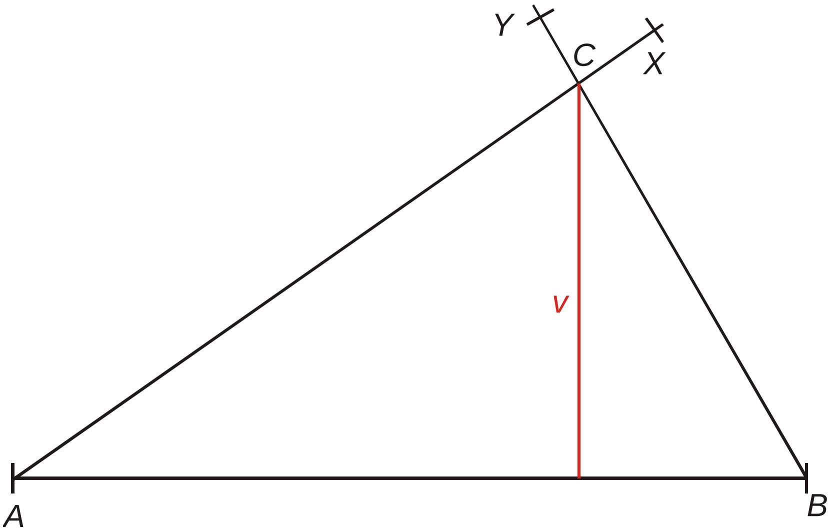
Nakreslíme si obrázek situace.



Narýsujeme trojúhelník s vrcholy ve stromech a změříme jeho výšku.

Problém: Strana trojúhelníku 21 cm je pro rýsování příliš dlouhá (nevejde se na papír), strana o délce 2,1 cm je poměrně krátká pro rýsování $\Rightarrow$ nebudeme ji rýsovat o délce 2,1 cm, ale například pětkrát větší (délka 10,5 cm). Změřenou výšku pak musíme také pětkrát zmenšit.

Sestrojujeme trojúhelník: $c = 10,5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 35°$, $\beta = 60°$.



Výška v_c má délku 5,2 cm $\Rightarrow$ v pětkrát menším trojúhelníku by měla délku $5,2 : 5 = 1,04$ cm.

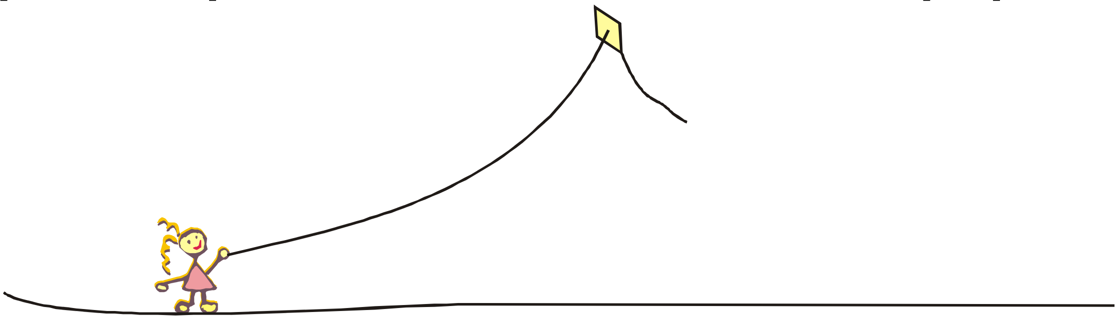
Řeka má v měřeném místě šířku přibližně 10 m.

Pedagogická poznámka: Neříkám dopředu, že je lepší kreslit trojúhelník zvětšený. Když si někteří začnou stěžovat, že 2,1 cm je příliš málo, nejdříve jen podotknu, že je nikdo nenutí rýsovat stranu o velikosti 2,1 cm.
Na konci příkladu se pak bavíme o tom, že menší obrázek znamená v průměru větší nepřesnost (což je možné většinou ihned demonstrovat na výsledcích jejich rýsování).

Př. 5: Petra pouštěla draka. Pořád ji vrtalo hlavou, jak zjistit výšku, ve které drak léta. navrhni způsoby, kterými by bylo možné výšku, ve které drak letí, zjistit.

Jako první se objevuje návrh změřit délku provázku. Provázek však nikdy nestoupá kolmo k drakovi, ale je našikmo.

Vylepšením je změřit úhel pod kterým provázek stoupá a narýsovat si trojúhelník, na kterém bychom změřili požadovanou vzdálenosti.
Tento způsob by určitě přinesl přesnější výsledky, ale pořád nezohledňuje skutečnost, že provázek nestoupá vzhůru rovnoměrně. Jeho strmost směrem k drakovi postupně narůstá.



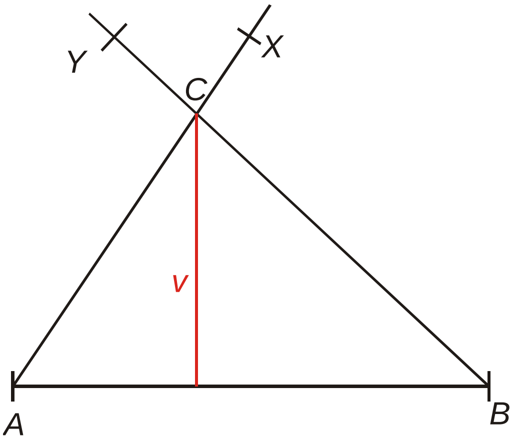
Pedagogická poznámka: Objevují se i nápady na využití podobnosti. Ty chválím, ale nerozvíjíme je.

Př. 6: Pak si vzpomněla na to, jak Odra měřil řeku a hned věděla. Navrhni postup, kterým je možné výšku určit.

Petra může změřit úhel, pod kterým vidí draka (strom na druhém břehu řeky) ze dvou různých míst (dva stromy na mém břehu řeky). Pokud změří i vzdálenost mezi těmito místy, může narýsovat trojúhelník a v něm změřit jeho výšku.

Př. 7: Petra draka viděla ve výškovém úhlu $56°$, kamarád Jirka, který stojí o 63 kroků dál, vidí draka ve výškovém úhlu $43°$. Jak je drak vysoko?

Sestrojujeme trojúhelník *ABC*: $c = 6{,}3\,\text{cm}$, $\alpha = 56°$, $\beta = 43°$.



Výška v_c má délku 3,6 cm $\Rightarrow$ drak létá ve výšce 36 kroků.

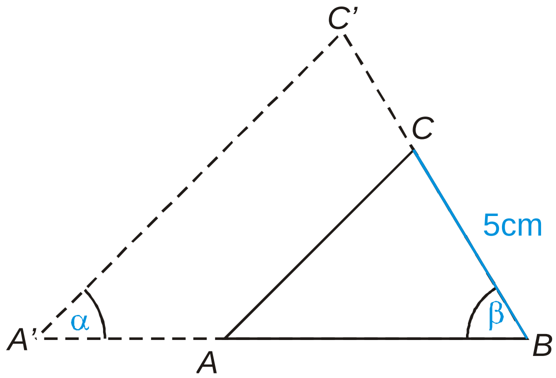
Př. 8: Může Petra opravdu napodobit postup na měření šířky řeky nebo musí dát pozor ještě na něco jiného?

Petra musí dát pozor. Pro příklad jsou důležité čtyři body (vrcholy trojúhelníka - stromy a pata výšky). Při měření šířky řeky můžeme předpokládat, že všechny leží víceméně ve vodorovné rovině, při měření výška draka to však nemusí být pravda $\Rightarrow$ Petra musí dávat pozor, aby oba body, ze kterých pozoruje draka ležely na přímce, která prochází přímo pod drakem (a na které bude ležet i pata výšky trojúhelníka). Pokud tato podmínka nebude splněna, trojúhelník, který rýsujeme, není ve skutečnosti kolmý k vodorovné rovině a výška, kterou změříme, bude větší než skutečná výška draka nad zemí.

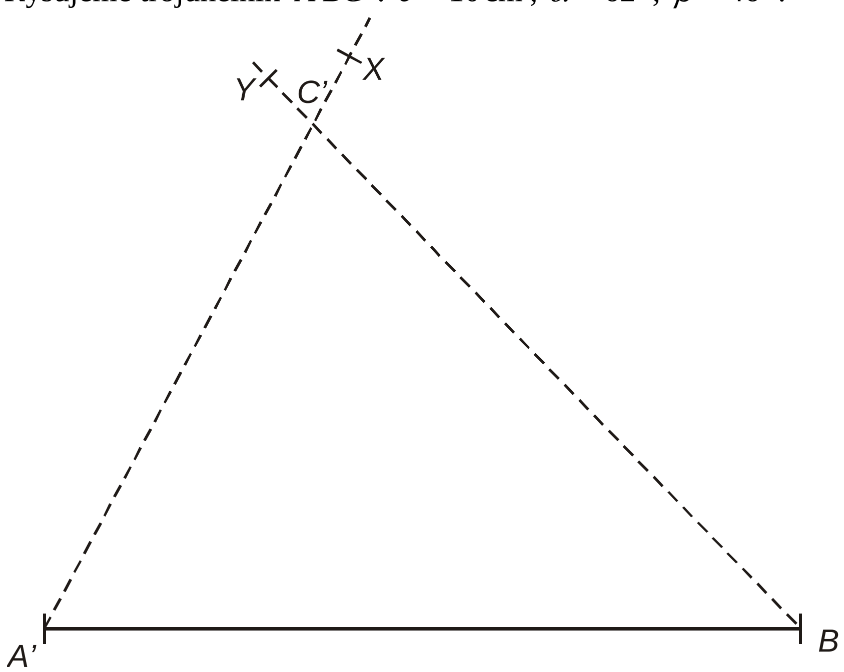
Pedagogická poznámka: Problém je možné snadno demonstrovat pravítkem. Při měření řeky leží ve vodorovné rovině a jeho výška je shodná se šířkou řeky, při měření výšky draka, může být trojúhelník nakloněný a jeho výška pak nemusí být výškou vrcholu nad lavicí.

Př. 9: Najdi čistě rýsovací řešení příkladu 3 (řešení, při kterém nebudeš dopočítávat velikost úhlu γ). Zapiš zápis konstrukce.

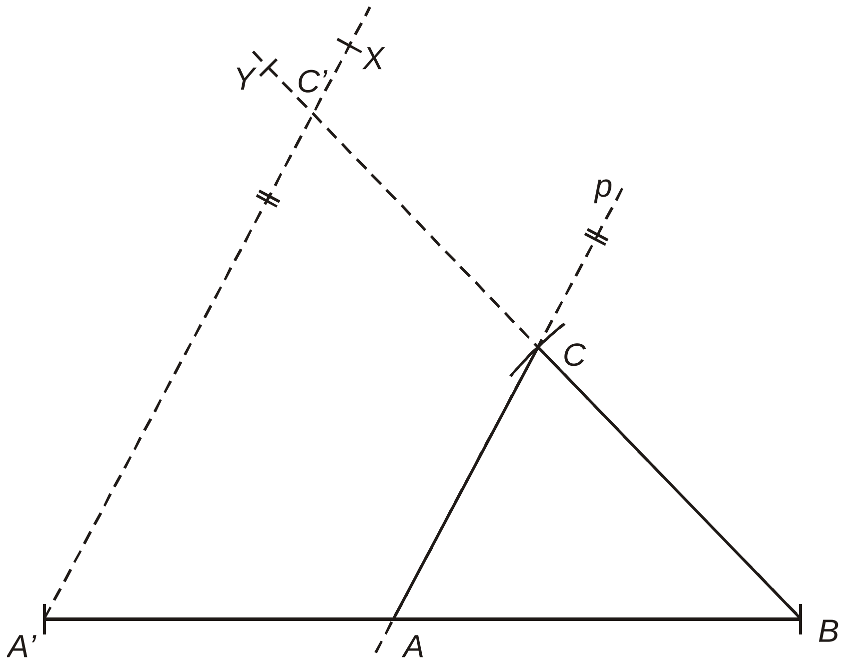
Sestroj trojúhelník ABC $a = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 62°$, $\beta = 46°$.
Úvaha: Zadané úhly určují tvar trojúhelníka, zadaná strana jeho velikost $\Rightarrow$ narýsujeme trojúhelník se zadanými úhly o libovolné velikosti. Poté ho zkusíme pomocí rovnoběžek zvětšit nebo zmenšit.



Rýsujeme trojúhelník $A'BC'$: $c' = 10\,\text{cm}$, $\alpha = 62°$, $\beta = 46°$.



Na úsečce BC' narýsujeme bod C a pak dorýsujeme pomocí rovnoběžky bod A.



Zápis konstrukce:

1. $A'B; |A'B| = c' = 10\,\text{cm}$

2. $\mapsto A'X; |\sphericalangle BA'X| = \alpha = 62°$

3. $\mapsto BY; |\sphericalangle A'BY| = \beta = 46°$

4. $C; C \in \mapsto BY; |BC| = a = 5\,\text{cm}$

5. $p; p \parallel \leftrightarrow A'C'; C \in p$

6. $A; A \in \mapsto BA' \cap p$

7. $\triangle ABC$

Shrnutí: