1.3.12 Prvočísla a čísla složená

Předpoklady: 010311

Pedagogická poznámka: V hodině je potřeba postupovat tak, abychom deset minut před koncem začali kontrolovat a na tabuli psát výsledky příkladu 3.

Př. 1: Tabulce přeškrtni takto ~~14~~ všechny násobky sedmi kromě sedmičky. Co mají společného čísla, která zůstanou v tabulce nepřeškrtnutá?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	~~14~~	15
16	17	18	19	20
~~21~~	22	23	24	25
26	27	~~28~~	29	30
31	32	33	34	~~35~~
36	37	38	39	40
41	~~42~~	43	44	45
46	47	48	~~49~~	50
51	52	53	54	55
~~56~~	57	58	59	60
61	62	~~63~~	64	65
66	67	68	69	~~70~~
71	72	73	74	75
76	~~77~~	78	79	80
81	82	83	~~84~~	85
86	87	88	89	90
~~91~~	92	93	94	95
96	97	~~98~~	99	100

Nepřeškrtnutá čísla nejsou násobky menších čísel (kromě jedničky, která dělí všechna čísla) ⇒ jsou jednoobdélníková, mají pouze dva dělitele jedničku a sama sebe (jednička má dokonce jediného dělitele - jedničku).

Jednoobdélníková čísla (s výjimkou 1) mají pouze dva dělitele: jedničku a sebe sama. Není možné je rozložit na součin jiných dvou činitelů. V matematice je nazýváme **prvočísla**.

Čísla, která můžeme rozložit na součin dvou menších čísel, nazýváme **čísla složená**. Jednička má pouze jednoho dělitele a proto ji nepovažujeme ani za prvočíslo ani za číslo složené.

Jako prvočísla označujeme čísla, která mají právě dva dělitele - jedničku a sebe sama.

Pedagogická poznámka: Poté, co na tabuli napíšeme definici prvočísel a složených čísel, se žáků ptám na kolik skupin jsme si takto rozdělili přirozená čísla. Přirozeně se nejčastěji ozývá, že na dvě, po chvilce se však začne převažovat správný názor, že ani jedna ze skupin neobsahuje jedničku, která tak tvoří třetí skupinu.

Př. 2: Prohlédni si vyškrtávací tabulku a vypiš do sešitu:
a) všechna složená čísla menší než 25
b) všechna prvočísla menší než 100. Kolik jich je?

a) všechna složená čísla menší než 25
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24
Složených čísel menších než 25 je 14.

b) všechna prvočísla menší než 50.
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
Prvočísel menších než 100 je 25.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zdaleka taková selanka, jak by se mohlo na první pohled zdát – někteří mají špatně vyškrtanou tabulku (nejčastěji škrtají i prvočísla a v prvním řádku, aby tabulka hezčí), jiní nedokáží systematicky čísla v tabulce projí a vypsat.

Př. 3: Najdi mezi zadanými čísly prvočísla. Přemýšlej o co nejúspornějším postupu.
a) 105 b) 111 c) 127 d) 161 e) 169

a) 105
Číslo je dělitelné 5 $\Rightarrow$ 105 není prvočíslo.

b) 111
Číslo je dělitelné 3 (ciferný součet 3) $\Rightarrow$ 111 není prvočíslo.

c) 127
Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $1+2+7=10$), 5 (poslední cifra),

$$\begin{array}{l} 127:7=18 \\ \ 57 \\ \ \ \ 1 \end{array} \Rightarrow \text{není dělitelné} 7, \quad \begin{array}{l} 127:11=11 \\ \ 17 \\ \ \ \ 6 \end{array} \Rightarrow \text{není dělitelné } 11.$$

Dál nemá cenu pokračovat, protože 127 je jen o 6 větší než čtvercové číslo $11\cdot11=121$ a určitě nebude dělitelné dvěma prvočísly, která jsou větší než 11 (nejmenší možnost je $13\cdot13=169$) $\Rightarrow$ 127 je prvočíslo.

d) 161
Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $1+6+1=8$), 5 (poslední cifra),

$$\begin{array}{l} 161:7=23 \\ \ 21 \\ \ \ \ 0 \end{array} \Rightarrow \text{je dělitelné} 7 \Rightarrow 161 \text{ není prvočíslo.}$$

e) 169

Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $1+6+9=16$), 5 (poslední cifra),

$\begin{array}{l}169:7=24\\ \;\;29\\ \;\;\;\;1\end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné7, $\begin{array}{l}169:11=15\\ \;\;59\\ \;\;\;\;4\end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné 11, $\begin{array}{l}169:13=13\\ \;\;39\\ \;\;\;\;0\end{array}$ $\Rightarrow$ je dělitelné 13 $\Rightarrow$ 169 není prvočíslo.

Pedagogická poznámka: Velmi častým problémem je naprosto chaotický zápis, proto se snažím žáky donutit k tomu, aby u každého testovaného čísla zapsali všechny čísla, kterými se snažili dělil a jak to dopadlo. Příklad řešíme bez kalkulaček, ty přijdou na řadu v příští hodině.

Pedagogická poznámka: Uchopení postupu má několik úrovní:
Stačí najít jednoho dělitele.
Využívám znaky dělitelnosti.
Dělím pouze prvočísly.
Dělím pouze prvočísly menšími než je druhá odmocnina z čísla.
Žáci pojem odmocniny neznají, ale z minula ví, že dělitele nalézají ve dvojicích a z toho někteří usoudí, že nemá cenu zkoušet dělit většími čísly, když podíl vyjde menší než číslo, kterým jsme dělili (dvojice se začnou opakovat).
V tomto okamžiku se koncem dělení do detailů nezabýváme, pro žáky je to z hlediska pochopení největší problém. Situaci navíc komplikuje fakt, že žáci často dělitelnost určují rozkladem čísla na součet nebo rozdíl (například $161=140+21$ a je tedy dělitelné 7), obejdou tak zjišťování podílů a nemohou z nich usoudit, zda již mají nebo nemají dělení zastavit.

Př. 4: Petr objevil jednodušší způsob hledání prvočísel. Vezme 6, odečte od ní jedničku a přičte k ní jedničku, získá tak dvě prvočísla 5 a 7. To samé udělá s 12 a získá prvočísla 11 a 13. Platí tento postup pro všechny násobky šesti? Můžeme tak najít všechna prvočísla?

Postup neplatí pro všechny násobky šesti: neplatí už pro číslo 24 (číslo 25, které je o jedna větší, není prvočíslo - je dělitelné 5).
Uvedeným postupem najdeme všechna prvočísla větší než 3. Vezmeme libovolný násobek čísla 6 větší než 0, označíme ho $6k$. Vypíšeme čísla, která za ním následují:
$6k;6k+1;6k+2;6k++;6k+4;6k+5;6k+6$
Číslo $6k+6$ je dalším násobkem šesti. Projdeme si dělitelnost jednotlivých čísel.

- $6k$ je určitě dělitelné 2 a 3 $\Rightarrow$ není prvočíslo,
- $6k+1$ **určitě není dělitelné 2 a 3 $\Rightarrow$ může (ale nemusí) být prvočíslo,**
- $6k+2$ je určitě dělitelné 2 $\Rightarrow$ není prvočíslo,
- $6k+3$ je určitě dělitelné 3 $\Rightarrow$ není prvočíslo,
- $6k+4$ je určitě dělitelné 2 $\Rightarrow$ není prvočíslo,
- $6k+5$ **určitě není dělitelné 2 a 3 $\Rightarrow$ může (ale nemusí) být prvočíslo,**
- $6k$ je určitě dělitelné 2 a 3 $\Rightarrow$ není prvočíslo.

Z rozboru vidíme, že všechna prvočísla větší než 3 jsou buď o jedna větší nebo o jedna menší než násobek 6.

Pokud bychom vypsali všechna čísla z Petrova postupu, získali bychom všechna prvočísla větší než 3, ale mezi získanými čísly by bylo mnoho složených čísel $\Rightarrow$ Petrův postup není použitelný jako postup na hledání prvočísel.

Př. 5: Prvočísla nalezená v příkladu 7 označujeme jako prvočíselná dvojčata. Musí být číslo mezi prvočíselnými dvojčaty vždy dělitelné šesti?

Prvočíselná dvojčata jsou dvě po sobě následující lichá čísla, která nejsou dělitelná třemi $\Rightarrow$ číslo mezi nimi musí být:

- dělitelné dvěma (protože je mezi dvěma lichými, musí být sudé),
- dělitelné třemi (je prostřední mezi třemi po sobě jdoucími čísly, ze tří po sobě jdoucích čísel je vždy jedno dělitelné třemi, krajní čísla to nejsou (jsou prvočísly), proto musí dělitelné třemi číslo prostřední),

$\Rightarrow$ číslo mezi prvočíselnými dvojčaty musí být dělitelné šesti.

Př. 6: Najdi v tabulce prvočíselná trojčata. Prvočíselných dvojčat je velmi mnoho (možná nekonečně mnoho, matematika dosud nemá jasno), prvočíselná trojčata jsou pouze jedna. Proč?

Prvočíselná trojčata jsou jediná: čísla 3, 5, 7.
Prvočíselná trojčata jsou tři po sobě jdoucí lichá čísla, vždy jedno z nich je dělitelné třemi $\Rightarrow$ jediné prvočíslo dělitelné třemi je číslo 3 $\Rightarrow$ prvočíselná trojčata musí obsahovat 3 $\Rightarrow$ jde o trojici čísel 3, 5, 7.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je domácí procvičování pro žáky, kteří nedokázali pohnout s příkladem 3.

Př. 7: Najdi mezi zadanými čísly prvočísla. Přemýšlej o co nejúspornějším postupu.
a) 119 b) 131 c) 157 d) 179 e) 213 f) 233

a) 119
Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $1+1+9=11$), 5 (poslední cifra),
$119:7=17$
49 $\Rightarrow$ je dělitelné7 $\Rightarrow$ 119 není prvočíslo..
0

b) 131
Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $1+3+1=5$), 5 (poslední cifra),
$131:7=18$
61 $\Rightarrow$ není dělitelné7,
5
$131:11=11$
21 $\Rightarrow$ není dělitelné 11. Dál nemá cenu pokračovat,
10
protože výsledek dělení 11 je 11 $\Rightarrow$ 131 je prvočíslo.

c) 157
Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $1+5+7=13$), 5 (poslední cifra),

$\begin{array}{l} 157:7=22 \\ \;17 \\ \;\;\;3 \end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné7, $\begin{array}{l} 157:11=13 \\ \;37 \\ \;\;\;4 \end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné 11, $\begin{array}{l} 157:13=12 \\ \;\;27 \\ \;\;\;\;1 \end{array}$. Dál nemá cenu pokračovat, protože výsledek dělení 13 je 12 (tedy menší než dělitel) $\Rightarrow$ 157 je prvočíslo.

d) 179
Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $1+7+9=17$), 5 (poslední cifra),
$\begin{array}{l} 179:7=25 \\ \;39 \\ \;\;\;4 \end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné7, $\begin{array}{l} 179:11=16 \\ \;69 \\ \;\;\;3 \end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné 11, $\begin{array}{l} 179:13=13 \\ \;\;49 \\ \;\;10 \end{array}$.

Dál nemá cenu pokračovat, protože 179 je jen o 10 větší než čtvercové číslo $13 \cdot 13 = 169$ a určitě nebude dělitelné dvěma prvočísly, která jsou větší než 13 (nejmenší možnost je $17 \cdot 17 = 289$) $\Rightarrow$ 179 je prvočíslo.

e) 213
Není dělitelné: 2 (poslední cifra).
Je dělitelné 3 (ciferný součet $2+1+3=6$) $\Rightarrow$ 213 není prvočíslo.

f) 233
Není dělitelné: 2 (poslední cifra), 3 (ciferný součet $2+3+3=8$), 5 (poslední cifra),
$\begin{array}{l} 233:7=33 \\ \;23 \\ \;\;\;2 \end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné7, $\begin{array}{l} 233:11=21 \\ \;13 \\ \;\;\;2 \end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné 11, $\begin{array}{l} 233:13=17 \\ 103 \\ \;\;12 \end{array}$ $\Rightarrow$ není dělitelné 13, $\begin{array}{l} 233:17=13 \\ \;\;63 \\ \;\;12 \end{array}$. Dál nemá cenu pokračovat, protože výsledek dělení 17 je 13 (tedy menší než dělitel) $\Rightarrow$ 233 je prvočíslo.

Shrnutí: Prvočísly nazýváme čísla, která mají právě dva dělitele - jedničku a sebe sama.