1.5.7 Zákon zachování mechanické energie I

Předpoklady: 1506

Opakování:

- Síla působící na dráze koná práci $W = Fs\cos\alpha$.
- Předmět, který se pohybuje rychlostí v má kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.
- Předmět, který se nachází ve výšce h nad hladinou nulové potenciální energie, má polohovou energii $E_p = mgh$.
- Práce vykonaná výslednou silou působící na předmět se rovná přírůstku kinetické energie $W = \Delta E_k$.
- Práce vykonaná gravitační silou působící na předmět se rovná úbytku potenciální energie $W_{F_g} = -\Delta E_p$.

Př. 1: Kámen o hmotnosti 5 kg volně pustíme z věže vysoké 45 m. Urči potenciální a kinetickou energii kamene: a) v okamžiku vypuštění b) po 1 s pádu c) po 2 s pádu d) po 3 s pádu.
Za hladinu nulové potenciální energie považuj patu věže.

a) Energie v okamžiku vypuštění

- Výška $h = 45\,\text{m} \Rightarrow E_p = mgh = 5\cdot 10\cdot 45\,\text{J} = 2250\,\text{J}$
- Rychlost $v = 0\,\text{m/s} \Rightarrow E_k = 0$

Celková energie: $E = E_p + E_k = 2250 + 0\,\text{J} = 2250\,\text{J}$

b) Energie po 1. sekundě pádu

- Dráha: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1^2\,\text{m} = 5\,\text{m} \Rightarrow$ výška $h = 40\,\text{m} \Rightarrow$
  $E_p = mgh = 5\cdot 10\cdot 40\,\text{J} = 2000\,\text{J}$
- Rychlost $v = at = 10\cdot 1 = 10\,\text{m/s} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10^2\,\text{J} = 250\,\text{J}$

Celková energie: $E = E_p + E_k = 2000 + 250\,\text{J} = 2250\,\text{J}$

c) Energie po 2. sekundě pádu

- Dráha: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2^2\,\text{m} = 20\,\text{m} \Rightarrow$ výška $h = 25\,\text{m} \Rightarrow$
  $E_p = mgh = 5\cdot 10\cdot 25\,\text{J} = 1250\,\text{J}$
- Rychlost $v = at = 10\cdot 2 = 20\,\text{m/s} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 20^2\,\text{J} = 1000\,\text{J}$

Celková energie: $E = E_p + E_k = 1250 + 1000\,\text{J} = 2250\,\text{J}$

c) Energie po 3. sekundě pádu

- Dráha: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3^2\,\text{m} = 45\,\text{m} \Rightarrow$ výška $h = 0\,\text{m} \Rightarrow$
  $E_p = mgh = 5\cdot 10\cdot 0\,\text{J} = 0\,\text{J}$

- Rychlost $v = at = 10 \cdot 3 = 30\,\text{m/s} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 30^2\,\text{J} = 2250\,\text{J}$

Celková energie: $E = E_p + E_k = 0 + 2250\,\text{J} = 2250\,\text{J}$

Pedagogická poznámka: Počítat předchozí příklad rozhodně není hlavní náplní hodiny. Příklad slouží spíše k zopakování vzorečků a maximálně po deseti minutách je třeba postoupit dál.

Př. 2: Kámen o hmotnosti 5 kg volně pustíme z věže vysoké 20 m. Popiš, jak se v průběhu pádu mění jeho potenciální a kinetická energie. Která síla změny obou druhů energií způsobuje? Odpor vzduchu zanedbej.

Potenciální energie kamene klesá (je stále níž), kinetická energie kamene roste (padá čím dál rychleji).
Na kámen působí pouze gravitační síla $\Rightarrow$ je tedy zároveň výslednicí, její práce je kladná (má stejný směr jako posunutí kamene).

- Práce vykonaná výslednou silou se rovná změně kinetické energie: $W_{F_g} = \Delta E_k$.
- Práce vykonaná gravitační silou se rovná úbytku potenciální energie: $W_{F_g} = -\Delta E_p$.

$\Rightarrow W_{F_g} = \Delta E_k = -\Delta E_p$.

$\Rightarrow$ Úbytek potenciální energie se rovná přírůstku kinetické energie $\Delta E_k = -\Delta E_p \Rightarrow$
$\Delta E_k + \Delta E_p = 0 \Rightarrow E_k + E_p = \text{konstanta}$ = **zákon zachování energie**.
POZOR: Platí pouze, když zanedbáme odpor vzduchu. Odpor vzduchu by zmenšil výslednou sílu působící na kámen a tím i přírůstek kinetické energie. Kinetická energie by rostla pomaleji než by potenciální klesala a celkové množství energie by se zmenšovalo.

Součet potenciální a kinetické energie tělesa nazýváme **celkovou mechanickou energií tělesa**.

Zákon zachování mechanické energie:
Při všech mechanických dějích se zanedbatelným působením odporových sil (tření, odpor vzduchu apod.) se může měnit kinetická energie tělesa v jeho potenciální energii a naopak, jejich součet však zůstává konstantní.

$$E = E_p + E_k = \text{konstanta}$$

Zákon zachování mechanické energie nutně vyplývá ze všech předchozích výsledků při našem studiu fyziky. Můžeme ho snadno dokázat pomocí vzorců pro obě energie a rovnoměrně zrychlený pohyb.
Sledujeme volný pád předmětu o hmotnosti m z výšky h_0.

- Počátek pádu: Předmět má pouze potenciální energii: $E_{p0} = mgh_0$.
- V libovolném pozdějším čase předmět o trochu spadne a získá určitou rychlost $\Rightarrow$ $E = E_p + E_k = mgh + \frac{1}{2}mv^2$.

Určíme výšku předmětu h a jeho rychlost v v libovolném čase t:
Předmět se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem s nulovou počáteční rychlostí a zrychlením g:

- výška h: $s=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h=h_0-\frac{1}{2}gt^2$,
- rychlost v: $v=gt$.

Dosadíme do vztahu pro energii: $E=E_p+E_k=mgh+\frac{1}{2}mv^2=mg\left(h_0-\frac{1}{2}gt^2\right)+\frac{1}{2}m\left(gt\right)^2$.

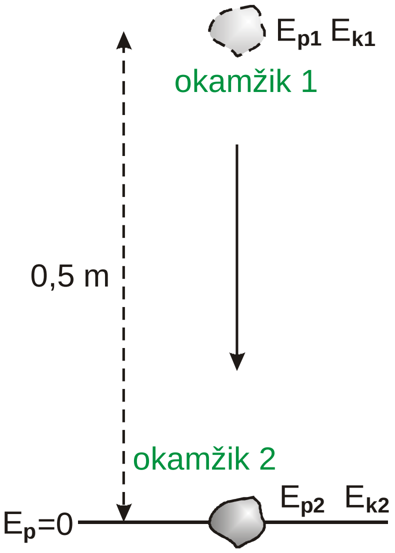
$E=mgh_0-mg\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}mg^2t^2=mgh_0-\frac{1}{2}mg^2h^2+\frac{1}{2}mg^2h^2=mgh_0 \Rightarrow$ celková mechanická energie předmětu se nezmění.

Na co je zákon zachování mechanické energie dobrý?
Nemusíme se zajímat o to, jak děj probíhal, stačí znát situaci na začátku a konci.

Pedagogická poznámka: Všechny následující příklady se do konce hodiny spočítat nedají, snažím se ale, aby žáci stihli samostatně co nejvíce rozborů. Jde opět o nácvik orientace v problému, kdy se žáci musí sami zamyslet, o co jde a podle toho se rozhodnout.

Př. 3: Urči rychlost, kterou dopadne na zem předmět padající z výšky 0,5 m. Odpor vzduchu zanedbej.

$h=0,5\,\mathrm{m}$, $g=10\,\mathrm{m/s^2}$, $v=?$



$E_{p1}+E_{k1}=E_{p2}+E_{k2}$

Platí: $E_{k1}=0$ (v okamžiku vypuštění nemá předmět žádnou rychlost). $E_{p2}=0$ (hladina nulové potenciální energie je na zemi).

$E_{p1}=E_{k2}$

$mgh=\frac{1}{2}mv^2$

$gh=\frac{1}{2}v^2$

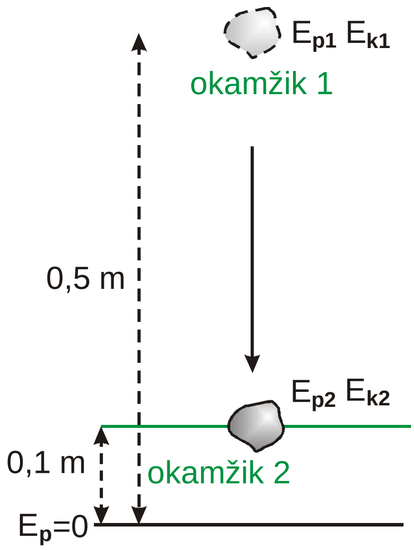
$2gh=v^2 \Rightarrow v=\sqrt{2gh}$

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot10\cdot0,5}=3,2\,\mathrm{m/s}$

Předmět dopadne zem rychlostí $3,2\,\mathrm{m/s}$.

Př. 4: Předmět padá z výšky 0,5 m. Urči jeho rychlost 10 cm nad podlahou. Odpor vzduchu zanedbej.

$h_1=0,5\,\mathrm{m}$, $h_2=0,1\,\mathrm{m}$, $g=10\,\mathrm{m/s^2}$, $v=?$



$E_{p1}+E_{k1}=E_{p2}+E_{k2}$

Platí: $E_{k1}=0$ (v okamžiku vypuštění nemá předmět žádnou rychlost).

$E_{p1}=E_{p2}+E_{k2}$

$mgh_1=mgh_2+\frac{1}{2}mv_2^2$

$gh_1=gh_2+\frac{1}{2}v_2^2$

$gh_1-gh_2=\frac{1}{2}v_2^2$

$2g(h_1-h_2)=v_2^2 \Rightarrow v_2=\sqrt{2g(h_1-h_2)}$

$v_2=\sqrt{2g(h_1-h_2)}=\sqrt{2\cdot 10(0,5-0,1)}=2,8\,\mathrm{m/s}$

Předmět má 10 cm nad podlahou rychlost 2,8 m/s.

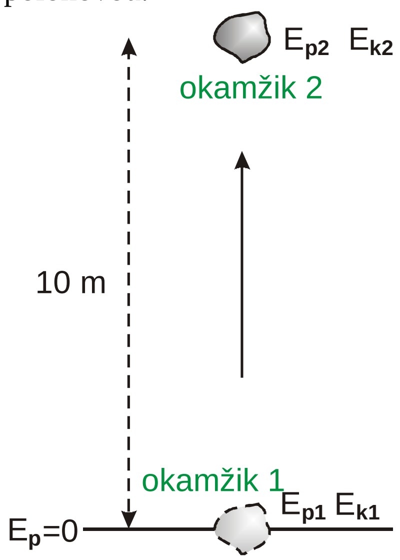
Pedagogická poznámka: Většina studentů řeší příklad pomocí vzorce odvozeného v třetím příkladu dosazením $h=0,4\,\mathrm{m}$. Takové řešení je samozřejmě správné. Přesto ukazuji studentům řešení obsažené v učebnici, aby si všimli, že odečítání výšek je obsaženo i ve výsledném vzorci.

Pedagogická poznámka: Studenti, kteří nestihnou následující dva příklady o hodině, by si je měli doplnit doma. Je to výjimečné, jde o základní orientaci v problematice, která usnadňuje práci v následující hodině.

Př. 5: Kámen byl vržen svisle vzhůru rychlostí 54 km/hod. Jakou rychlost bude mít ve výšce 10 m? Odpor vzduchu zanedbej.

$v_1=54\,\mathrm{km/h}=15\,\mathrm{m/s}$ $h=10\,\mathrm{m}$ $v_2=?$

Odpor vzduchu neuvažujeme $\Rightarrow$ platí zákon zachování mechanické energie. V okamžiku vrhu měl kámen pouze kinetickou energii, která se v průběhu stoupání postupně mění na polohovou.



$E_{p1}+E_{k1}=E_{p2}+E_{k2}$

Platí: $E_{p1}=0$ (těleso vrháme z nulové hladiny potenciální energie).

$E_{k1}=E_{k2}+E_{p2}$

$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_2^2+mgh_2 \quad /\cdot 2$

$v_1^2=v_2^2+2gh_2$

$v_1^2-2gh_2=v_2^2$

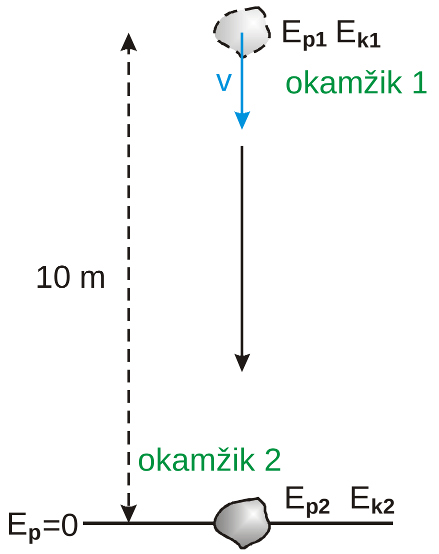
$v_2=\sqrt{v_1^2-2gh_2}=\sqrt{15^2-2\cdot 10\cdot 10}\,\mathrm{m/s}=5\,\mathrm{m/s}$

Kámen bude mít ve výšce 10 m rychlost 5 m/s.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad působí studentům značné problémy. Rozebereme si příklad, nakreslíme si obrázek a vypíšeme si do něj, jaké druhy energie těleso v obou polohách má. Pak trvám na tom, aby rovnici $E_{k1} = E_{k2} + E_{p2}$ sestavili sami.

Př. 6: Kámen byl z výšky 10 m hozen kolmo dolů rychlostí 15 m/s. Jakou rychlostí dopadne na zem. Odpor vzduchu zanedbej.

$h_1 = 10\,\text{m}$, $h_2 = 0\,\text{m}$, $v_1 = 15\,\text{m/s}$, $v_2 = ?$



$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$

Platí: $E_{p2} = 0$ (dopad na zem).

$E_{p1} + E_{k1} = E_{k2}$

$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

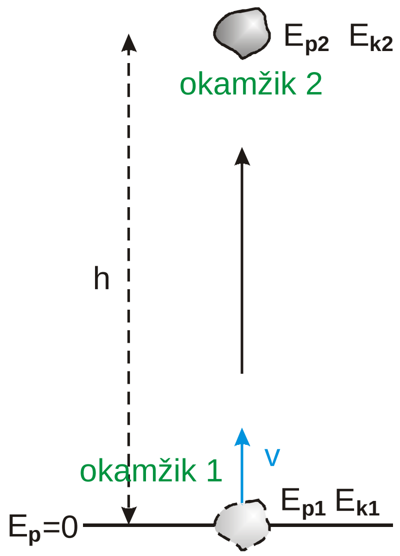
$2gh_1 + v_1^2 = v_2^2$

$v_2 = \sqrt{2gh_1 + v_1^2} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10 + 15^2}\ \text{m/s} = 20{,}6\,\text{m/s}$

Kámen dopadne na zem rychlostí 20,6 m/s.

Př. 7: Kámen byl ze země hozen kolmo vzhůru rychlostí 20 m/s. Do jaké výšky vystoupá?

$h_1 = 0\,\text{m}$, $v_1 = 20\,\text{m/s}$, $v_2 = 0$, $h_2 = ?$



$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$

Platí: $E_{p1} = 0$ (házíme ze země), $E_{k2} = 0$ (v nejvyšším bodě se zastaví).

$E_{k1} = E_{p2}$

$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2$

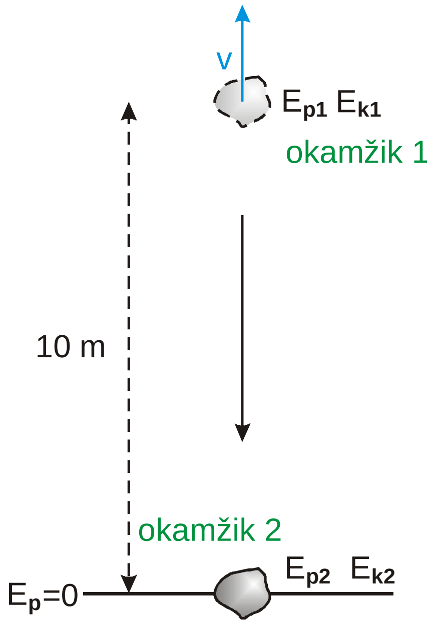
$h_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 10}\,\text{m} = 20\,\text{m}$

Kámen vystoupá do výšky 20 m.

Pedagogická poznámka: Některým žákům zůstanou v rovnici dvě neznámé, protože si neuvědomí, že v okamžiku dosažení maximální výšky se kámen na okamžik zastaví.

Př. 8: Kámen byl z výšky 10 m hozen kolmo nahoru rychlostí 15 m/s. Jakou rychlostí dopadne na zem. Odpor vzduchu zanedbej.

$h_1 = 10\,\text{m}$, $h_2 = 0\,\text{m}$, $v_1 = 15\,\text{m/s}$, $v_2 = ?$



$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$

Platí: $E_{p2} = 0$ (dopad na zem).

$E_{p1} + E_{k1} = E_{k2}$

$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

$2gh_1 + v_1^2 = v_2^2$

$v_2 = \sqrt{2gh_1 + v_1^2} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10 + 15^2}\ \text{m/s} = 20,6\,\text{m/s}$

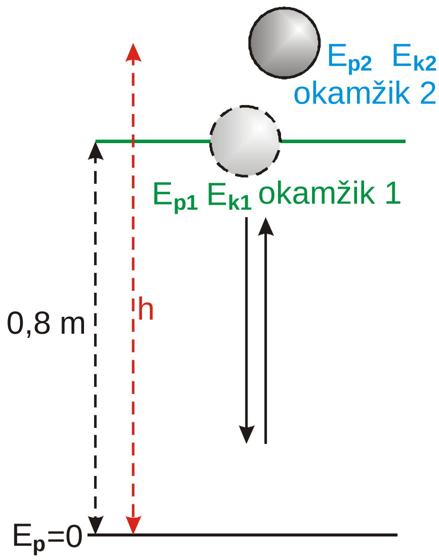
Kámen dopadne na zem rychlostí 20,6 m/s.

Pedagogická poznámka: Možná dokonce většina žáků si příklad rozděluje na dvě části a jako mezivýsledek zjišťuje maximální výšku vrhu. Jde o dobrou záminku k připomenutí, že hlavní výhodou ZZE je, že nemusíme sledovat průběh děje, ale pouze počáteční a koncový stav a proto nás maximální výška vrhu vůbec nezajímá. I úvahou je pak možné zjistit, že rychlost dopadu musí být stejná jako v příkladu 6.

Př. 9: Tenista dribluje míčkem. Míček opouští ruku svisle dolů rychlostí $2\,\text{m/s}$ ve výšce $80\,\text{cm}$ nad povrchem kurtu. Do jaké výšky by po odrazu vyskočil, kdyby byl jeho odraz od kurtu dokonale pružný (beze ztrát energie)?

$h_1 = 80\,\text{cm} = 0,8\,\text{m}$ $\quad v_1 = 2\,\text{m/s}$ $\quad h = ?$

V místě, kde opouští ruku, má míček potenciální i kinetickou energii. Potenciální energie se při pádu mění v kinetickou. V okamžiku nárazu na kurt má míček pouze kinetickou energii. Při odrazu se tato energie změní na energii pružnosti míčku a opět na kinetickou energii. Ta se při letu míčku nahoru mění na potenciální. V nejvyšším místě má míček pouze potenciální energii. Protože jsme předpokládali nulové ztráty, musí být jeho potenciální energie v nejvyšším bodě dráhy stejná, jako byla jeho celková energie v okamžiku, kdy opustil ruku.



$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$$

Platí: $E_{k2} = 0$ (míč se v nejvyšším bodě dráhy zastaví).

$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = mgh_2 \qquad / \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_1^2 + 2gh_1 = 2gh_2$$

$$h_2 = \frac{v_1^2 + 2gh_1}{2g}$$

$$h_2 = \frac{v_1^2 + 2gh_1}{2g} = \frac{2^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 10}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$$

Míček by po odrazu vyskočil do výšky $1\,\mathrm{m}$.

Shrnutí: Celková mechanická energie tělesa se zachovává, můžeme ji proto využít k porovnání situací ve dvou různých okamžicích.