

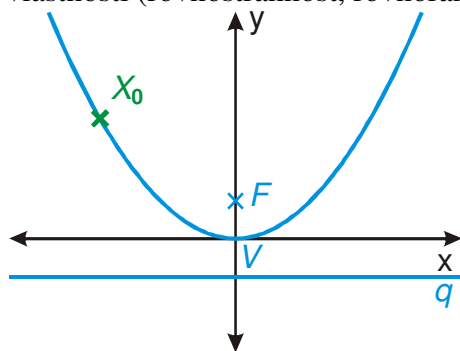
7.5.15 Parabola a přímka

Předpoklady: 7505, 7506, 7511, 7512, 7513

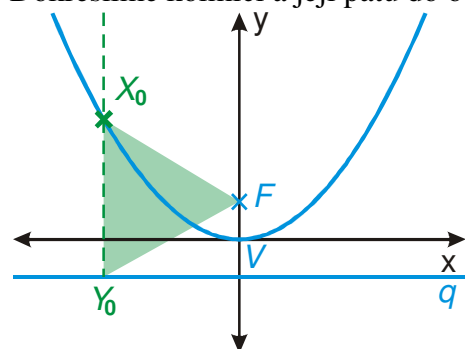
Pedagogická poznámka: Na probrání celého obsahu je třeba tak jeden a půl vyučovací hodiny. Pokud tolik času nemáte, je potřeba buď rychle proběhnout úvodní část nebo vynechat poslední příklad a zadat ho na domácí přípravu.

Čeká nás poslední hodina o parabolách a stále ještě nevíme, proč se satelitní anténě říká parabola \Rightarrow nejvyšší čas rozřešit tuto záhadu.

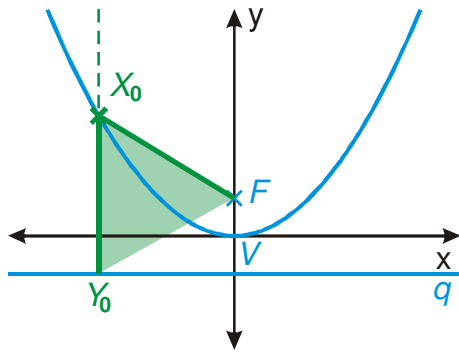
Př. 1: Na obrázku je nakreslena parabola $x^2 = 2py$ s ohniskem F , řídicí přímkou q a vrcholem $V[0;0]$. Bod $X_0[x_0; y_0]$ je libovolný bod paraboly různý od vrcholu. Označ patu kolmice vedené bodem X_0 na přímku q jako Y_0 . Rozhodni na základě vlastností paraboly, zda vzniklý trojúhelník X_0FY_0 je obecný nebo má speciální vlastnosti (rovnostřannost, rovnoramennost, pravouhlost ...).



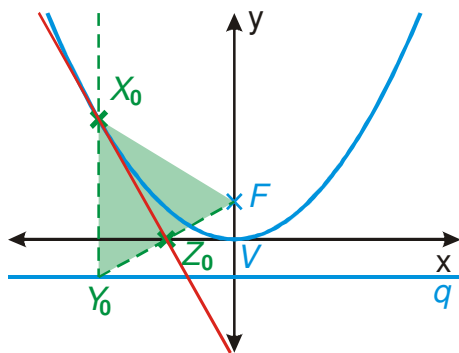
Dokreslíme kolmici a její patu do obrázku:



Z definice paraboly vyplývá: $|X_0F| = |X_0q| = |X_0Y_0| \Rightarrow$ trojúhelník X_0FY_0 je rovnoramenný se základnou Y_0F .

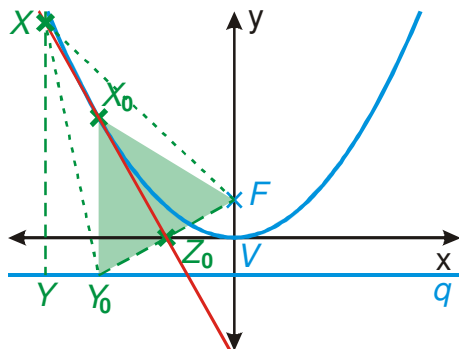


Př. 2: (BONUS) Střed úsečky FY_0 z předchozího příkladu označ Z_0 . Odhadni a poté dokaž, kolik společných bodů má přímka X_0Z_0 s parabolou $x^2 = 2py$.



Podle obrázku se zdá, že nakreslená přímka má s parabolou jediný společný bod X_0 a je její tečnou.

Důkaz je jednoduchý. Nakreslíme si libovolný bod přímky Z_0X_0 různý od X_0 .



Trojúhelník X_0FY_0 je rovnoramenný \Rightarrow přímka Z_0X_0 je jeho osou a tedy i osou strany $FY_0 \Rightarrow$ všechny body této přímky jsou stejně vzdálené od krajních bodů F a $Y_0 \Rightarrow |XF| = |XY_0|$.

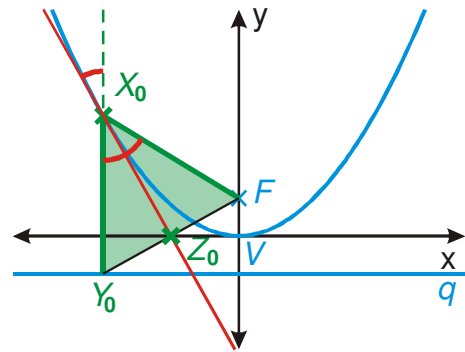
Zkontrolujeme, zda bod X splňuje podmínku pro bod paraboly: $|XF| = |Xq| = |XY|$.

Z obrázku je vidět, že platí: $|XY| < |XY_0| = |XF| \Rightarrow |Xq| < |XF| \Rightarrow$ bod X určitě není bodem paraboly.

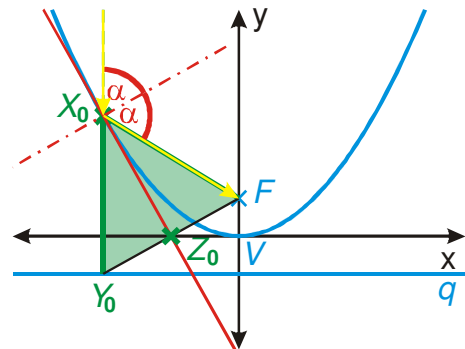
Proč jsme to všechno dělali?

1. Z našeho obrázku už je možné snadno odvodit rovnici tečny paraboly.
2. Teď už snadno ukážeme, proč chytáme satelit pomocí parabol.

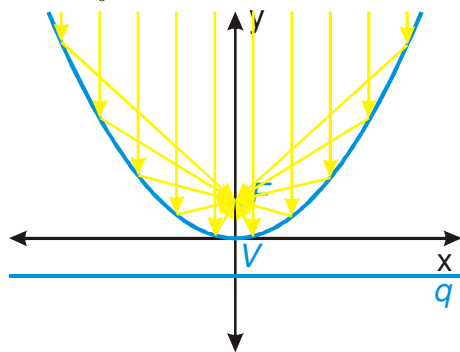
Přímka Z_0X_0 je osou trojúhelníku \Rightarrow dělí úhel Y_0X_0F na dvě stejné poloviny \Rightarrow všechny tři vyznačené úhly jsou stejné (věta o vrcholových úhlech).



Protože tečna udává směr paraboly v bodě X_0 , udává i rovinu, od které se odráží paprsek, který v tomto místě dopadne na parabolu. Vyznačené úhly pak ukazují, že paprsek rovnoběžný s osou paraboly se odrazí do jejího ohniska.



Bod X_0 jsme volili libovolně \Rightarrow pravidlo o odrazu platí pro všechny body paraboly.



Parabola u satelitu soustřeďuje paprsky signálu (které pocházejí z velmi vzdáleného zdroje a tak jsou prakticky rovnoběžné) do svého ohniska (kde je namontovaný přijímač).
Obráceně funguje parabola u reflektorů. V ohnisku parabolického zrcadla je umístěna žárovka a parabolické zrcadlo odráží paprsky z žárovky do vodorovného proudu světla.

Vrátíme se k tečnám paraboly. Nebudeme si je odvozovat z předchozích obrázků, použijeme nápodobu s tečnami elipsy a kružnice.

Hledáme tečnu paraboly $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ v bodě $X[x_0; y_0]$, který na ní leží.

- Rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru: $(x-m)^2 = 2p(y-n)$.
- Rozložíme závorky s neznámými: $(x-m)(x-m) = p(y-n) + p(y-n)$ (závorku na pravé straně nemůžeme rozložit na součin, protože není na druhou. Můžeme ji však napsat jako součet, protože je násobená dvěma).
- Vždy jednu neznámou nahradíme souřadnicí bodu X_0 :

$$(x_0 - m)(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n).$$

Kupodivu to funguje.

Pedagogická poznámka: Pro „odvození“ rovnice tečny u paraboly jsem zvolil předchozí postup ze těchto důvodů:
Klasické odvození je dlouhé, studenti ho příliš nesledují a sami ho nejsou schopni provést. Zbývá tak málo času na počítání příkladů.
Klasicky se odvozuje pouze rovnice pro speciální polohu paraboly s vrcholem

v počátku soustavy souřadnic.

Pro čtyři různé tvary vrcholové rovnice, máme čtyři různé tvary rovnice tečny \Rightarrow považují za užitečnější ukázat postup, jak získávat tyto rovnice z rovnic parabol, aby se studenti zbytečně nesnažili zapamatovat si čtyři vzorce.

Pro každý z druhů paraboly existuje odpovídající rovnice tečny v jejím bodě $X_0[x_0; y_0]$:

$$(x-m)^2 = 2p(y-n) \quad \Rightarrow \quad (x_0-m)(x-m) = p(y_0-n) + p(y-n)$$

$$(x-m)^2 = -2p(y-n) \quad \Rightarrow \quad (x_0-m)(x-m) = -p(y_0-n) - p(y-n)$$

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \quad \Rightarrow \quad (y_0-n)(y-n) = p(x_0-m) + p(x-m)$$

$$(y-n)^2 = -2p(x-m) \quad \Rightarrow \quad (y_0-n)(y-n) = -p(x_0-m) - p(x-m)$$

Př. 3: Najdi rovnici tečny dané paraboly v daném bodě:

a) $(x+1)^2 = 4(y+2); X_0[1; ?]$ b) $y^2 = -x; X_0[?; 2]$.

Správnost dosazení ověř výpočtem průsečíků přímky s parabolou.

a) $(x+1)^2 = 4(y+2) \quad X_0[1; ?]$

Určíme druhou souřadnici bodu $X_0: (1+1)^2 = 4(y+2)$.

$$4 = 4(y+2)$$

$$y+2=1 \Rightarrow y=-1$$

Hledáme tečnu paraboly $(x+1)^2 = 4(y+2)$ v bodě $X_0[1; -1]$.

Vzorec pro tečnu: $(x_0+1)(x+1) = 2(y+2) + 2(y_0+2)$.

Dosadíme bod $X_0[1; -1]: (1+1)(x+1) = 2(y+2) + 2(-1+2)$.

$$2x+2 = 2y+4+2$$

$$2x-2y-4=0$$

Rovnice tečny: $x-y-2=0$.

Určíme společné body dosazením, z rovnice tečny vyjádříme $y: y = x-2$.

Dosadíme do rovnice paraboly: $(x+1)^2 = 4([x-2]+2)$.

$$x^2 + 2x + 1 = 4x$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \text{jediný průsečík s } x\text{-vou souřadnicí } x=1 \text{ (bod ze zadání)}.$$

b) $y^2 = -x \quad X_0[?; 2]$

Určíme druhou souřadnici bodu $X_0: 2^2 = -x \Rightarrow x = -4$.

Hledáme tečnu paraboly $(y-0)^2 = -2\frac{1}{2}(x-0)$ v bodě $X_0[-4; 2]$.

Vzorec pro tečnu: $(y_0-0)(y-0) = -\left(\frac{x}{2}-0\right) - \left(\frac{x_0}{2}-0\right)$.

Dosadíme bod $X_0[-4; 2]: 2y = -\frac{x}{2} - \frac{-4}{2}$.

$$2y = -\frac{x}{2} + 2 \quad / \cdot 2$$

$$4y = -x + 4$$

Tečna má rovnici: $x + 4y - 4 = 0$.

Určíme společné body dosazením, z rovnice tečny vyjádříme x : $x = 4 - 4y$.

Dosadíme do rovnice paraboly: $y^2 = -(4 - 4y)$.

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$(y - 2)^2 = 0 \Rightarrow$ jediný průsečík s y -ovou souřadnicí $y = 2$ (bod ze zadání).

Poznámka: Rovnici tečny v bodě b) můžeme samozřejmě zapisovat rovnou bez dosazování souřadnic počátku $[0;0]$ takto: $y^2 = -x \Rightarrow yy_0 = -\frac{x}{2} - \frac{x_0}{2}$.

Pedagogická poznámka: Části studentů bude působit obrovské problémy dopočítání zbývajících souřadnic. Tuto část příkladu je lepší odtajnit brzo.

Př. 4: Urči vzájemnou polohu paraboly $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ a přímky $x - y - 3 = 0$.

Vzájemná poloha \Rightarrow určíme průsečíky \Rightarrow řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Nejjednodušší je vyjádřit z druhé rovnice y a dosadit do první (je tam pouze jedenkrát):

$$x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3.$$

$$x^2 - 4x - y + 1 = x^2 - 4x - (x - 3) + 1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$(x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow$ dva kořeny:

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = x_1 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow P_1[4;1]$
- $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = x_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow P_2[1;-2]$

Přímka má s parabolou dva průsečíky $P_1[4;1]$ a $P_2[1;-2]$, je tedy její sečnou.

Př. 5: Je dána parabola $(y - 2)^2 = 2(x - 1)$. Najdi tečny této paraboly procházející bodem $X[-3;1]$.

Bod X neleží na parabole \Rightarrow nemůžeme použít vzorce pro tečny \Rightarrow stejný postup jako u ostatních kuželoseček: všechny přímky bodem X a z nich vybereme ty s jedním průsečíkem.

Přímky procházející bodem $X[-3;1]$: $(y - 1) = k(x + 3)$ a přímka $x = -3$.

Z rovnice přímky vyjádříme x a dosadíme do rovnice paraboly (dostaneme složitější výraz ve vyjádření, ale po dosazení nebudeme umocňovat):

$$y - 1 = kx + 3k$$

$$kx = y - 3k - 1$$

Vyjádřit můžeme pouze když $k \neq 0 \Rightarrow$ musíme prozkoumat možnost $k = 0$:

$$0x = y - 3 \cdot 0 - 1 \Rightarrow y = 1$$

Dosadíme do rovnice paraboly: $(1 - 2)^2 = 2(x - 1)$

$$1 = 2x - 2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

⇒ Přímka $y = 1$ se protíná s parabolou v jediném bodě $P\left[\frac{3}{2}; 1\right]$.

Dále předpokládáme $k \neq 0$: $x = \frac{y - 3k - 1}{k}$

Dosadíme do rovnice paraboly: $(y - 2)^2 = 2\left(\frac{y - 3k - 1}{k} - 1\right) = 2\left(\frac{y - 3k - 1 - k}{k}\right)$

$$y^2 - 4y + 4 = 2 \cdot \frac{y - 4k - 1}{k} \quad / \cdot k$$

$$ky^2 - 4ky + 4k = 2y - 8k - 2 \quad / \cdot k$$

$$ky^2 - 4ky - 2y + 12k + 2 = 0$$

$$ky^2 + (-4ky - 2)y + 12k + 2 = 0$$

Víme, že $k \neq 0$, určíme, kdy se diskriminant rovnice rovná nule:

$$D = b^2 - 4ac = (-4ky - 2)^2 - 4 \cdot k \cdot (12k + 2) = 0$$

$$16k^2 + 16k + 4 - 48k^2 - 8k = 0$$

$$-32k^2 + 8k + 4 = 0 \quad / : (-4)$$

$$8k^2 - 2k - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{2 \pm 6}{16}$$

$$\bullet \quad k_1 = \frac{2+6}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tečna } (y-1) = \frac{1}{2}(x+3) \quad / \cdot 2$$

$$2y - 2 = x + 3 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$$

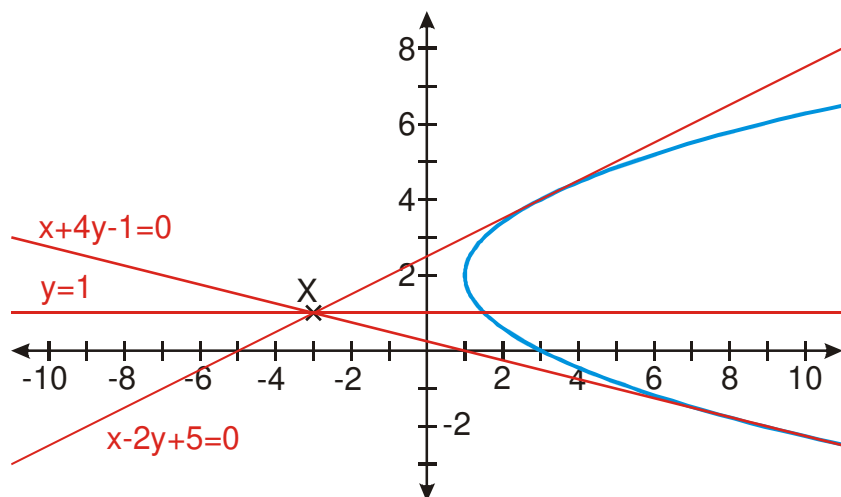
$$\bullet \quad k_2 = \frac{2-6}{16} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{tečna } (y-1) = -\frac{1}{4}(x+3) \quad / \cdot 4$$

$$4y - 4 = -x - 3 \Rightarrow x + 4y - 1 = 0$$

Výsledek není úplně bez problémů. Očekávali jsme dvě tečny, ale vyšly nám tři přímky:

- $y = 1$
- $x - 2y + 5 = 0$
- $x + 4y - 1 = 0$

Kde se stala chyba? Nakreslíme si obrázek:



Přímka $y = 1$ rozhodně nevypadá jako tečna, i když má s parabolou pouze jeden průsečík, za tečnu ji nepovažujeme (asi bychom potřebovali přesnější definici tečny, ale nebudeme to zatím řešit).

⇒ Každým bodem, který se nachází ve vnější oblasti paraboly, procházejí tři přímky, které mají s parabolou jediný společný bod:

- dvě tečny,
- přímka rovnoběžná s osou paraboly.

Dodatek: Ke stejnému výsledku bychom se poněkud pomaleji dostali i když bychom při dosazování vyjádřili místo x neznámou y :

Vyjádříme y a dosadíme do rovnice paraboly: $y = kx + 3k + 1$.

$$(kx + 3k + 1 - 2)^2 = 2(x - 1)$$

$$(kx + 3k - 1)(kx + 3k - 1) = 2x - 2$$

$$k^2x^2 + 3k^2x - kx + 3k^2x + 9k^2 - 3k - kx - 3k + 1 = 2x - 2$$

$$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx + 9k^2 - 6k + 1 = 2x - 2$$

$$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx - 2x + 9k^2 - 6k + 3 = 0$$

$$k^2x^2 + (6k^2 - 2k - 2)x + 9k^2 - 6k + 3 = 0$$

Abychom mohli dosadit do vzorce, musíme prozkoumat možnost $k = 0$.

Dosadíme: $0^2x^2 + (6 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 2)x + 9 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 0$.

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ - jediný průsečík } \Rightarrow \text{ pro } k = 0 \text{ má přímka } y = kx + 3k + 1 = 1$$

s parabolou jediný průsečík.

Nyní předpokládáme $k \neq 0$, určíme diskriminant rovnice:

$$D = b^2 - 4ac = (6k^2 - 2k - 2)^2 - 4 \cdot k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$$

$$2^2(3k^2 - k - 1)^2 - 4 \cdot k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0 \quad / : 4$$

$$(3k^2 - k - 1)(3k^2 - k - 1) - k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$$

$$9k^4 - 3k^3 - 3k^2 - 3k^3 + k^2 + k - 3k^2 + k + 1 - 9k^4 + 6k^3 - 3k^2 = 0$$

$-8k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow$ řešíme kvadratickou rovnici $8k^2 - 2k - 1 = 0$ (stejná rovnice jako v původním řešení příkladu výše).

- Př. 6:** Petáková:
strana 129/cvičení 81 c)
strana 129/cvičení 84 b)
strana 130/cvičení 87
strana 130/cvičení 92 d)
strana 130/cvičení 94 a)

Shrnutí: Z bodu ležícího ve vnější oblasti paraboly je k parabole možné sestavit tři přímky s jediným společným bodem, kromě dvou tečen i rovnoběžku s osou paraboly. Ostatní vztahy mezi přímkou a parabolou jsou analogické situaci u elips.