7.5.6 Tečny kružnic II

Předpoklady: 4501, 4504

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří na gymnázium mezi početně nejnáročnější. Ačkoliv jsou příklady optimalizované na co nejmenší početní obtížnost, všichni studenti nedokáží dopočítat kompletní obsah celé hodiny. Provádíme kontroly po částech příkladů, pokud někdo nestíhá, trvám na tom, aby nejhorší úseky neopisoval a vynechával si místo v sešitě, aby mu zbyl čas na úseky, které mají význam z hlediska pochopení smyslu příkladů.
Přesto všechno to nakonec dopadne tak, že pokud třída nepočítá opravdu dobře, roztáhnou se následující příklady do dvou hodin.

Př. 1: Je dána kružnice $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $P[5;-1]$. Rozhodni, zda bod P leží uvnitř, vně nebo na kružnici k. Pokud existují, najdi tečny kružnice procházející bodem P.

Polohu bodu P zjistíme z jeho vzdálenosti od středu kružnice:
$|PS|=\sqrt{(p_1-s_1)^2+(p_2-s_2)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}$
$\Rightarrow$ bod P leží vně kružnice $\Rightarrow$ existují dvě tečny kružnice procházející tímto bodem.

Co víme o hledaných tečnách?
Prochází bodem P $\Rightarrow$ neznáme směr (ten zjistíme z toho, že přímka je tečnou) $\Rightarrow$ zapíšeme tečny pomocí parametru ve směrnicovém tvaru a najdeme správnou hodnotu parametru podle počtu průsečíků s kružnicí k.
Přímky procházejí bodem $P[5;-1]$: $(y+1)=k(x-5)$ $\Rightarrow$ $y=kx-5k-1$ + svislá přímka $x=5$.
Dosadíme do středové rovnice kružnice: $(x-1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(kx-5k-1-1)^2=10$.
$(x-1)^2+(kx-5k-2)^2=10$
$x^2-2x+1+k^2x^2-5k^2x-2kx-5k^2x+25k^2+10k-2kx+10k+4=10$
$(1+k^2)x^2-10k^2x-4kx-2x+25k^2+20k-5=0$
$(1+k^2)x^2-2(5k^2+2k+1)x+5(5k^2+4k-1)=0$
Počet řešení závisí na hodnotě diskriminantu. Hledáme tečnu $\Rightarrow$ chceme jediný průsečík $\Rightarrow$ jediné řešení $\Rightarrow$ hledáme nulový diskriminant.
$D=b^2-4ac=\left[-2(5k^2+2k+1)\right]^2-4(1+k^2)\cdot5(5k^2+4k-1)=0$
$=4(25k^4+10k^3+5k^2+10k^3+4k^2+2k+5k^2+2k+1)-20(5k^2+4k-1+5k^4+4k^3-k^2)=$
$=4(25k^4+20k^3+14k^2+4k+1)-20(5k^4+4k^3+4k^2+4k-1)=$
$=100k^4+80k^3+56k^2+16k+4-100k^4-80k^3-80k^2-80k+20=$
$=-24k^2-64k+24=0$
$=3k^2+8k-3=0$
Požadované hodnoty parametru k najdeme vzorcem pro kvadratickou rovnici:

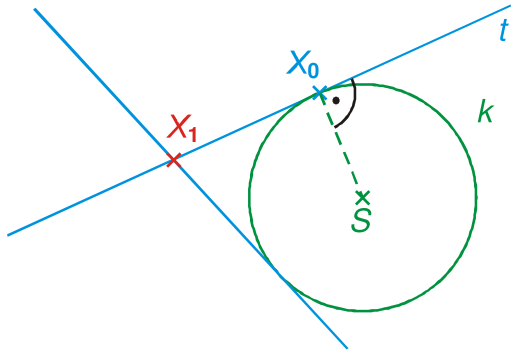
$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot3\cdot(-3)}}{2\cdot3}=\frac{-8\pm10}{6}$$

- $k_1=\frac{-8-10}{6}=-3 \quad \Rightarrow$ Tečna $(y+1)=-3(x-5) \Rightarrow 3x+y-14=0$
- $k_2=\frac{-8+10}{6}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow$ Tečna $(y+1)=\frac{1}{3}(x-5) \Rightarrow x-3y-8=0$

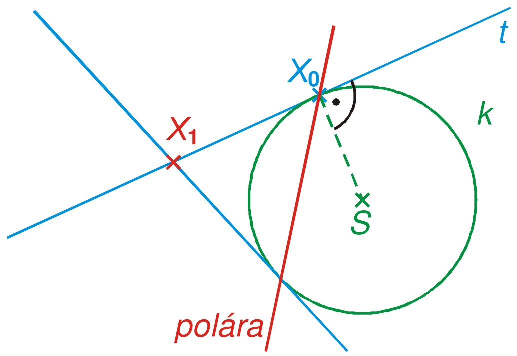
Z bodu $P[5;-1]$ je možné vést ke kružnici $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ dvě tečny: $3x+y-14=0$ a $x-3y-8=0$.

Řešení předchozího příkladu rozhodně nebylo snadné (i přes to, že nakonec vyšla „pěkná" čísla). Tečny jde naštěstí nalézt i rychleji.

Opět předeme na jiné značení. Je dána kružnice $k([m;n];r)$ a bod $X_1[x_1;y_1]$.
Předpokládáme, že bod X_1 leží vně kružnice (kdyby ležel uvnitř, není možné tečnu sestrojit, kdyby ležel na kružnici, můžeme tečnu sestrojit pomocí rovnice tečny z minulé hodiny).
Když sestrojíme tečnu kružnice z bodu X_1 získáme tečný bod X_0.



Bod X_1 leží na tečně ke kružnici *k* procházející bodem X_0. Rovnici této přímky jsme odvodili minulou hodinu $\Rightarrow$ bod X_1 leží na přímce $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$ $\Rightarrow$ rovnice musí vyjít, pokud do ní dosadíme bod $X_1[x_1;y_1]$ $\Rightarrow$
$(x_0-m)(x_1-m)+(y_0-n)(y_1-n)=r^2$ - toto není rovnice přímky, ale rovnost dvou konkrétních čísel, neobsahující žádnou proměnou.
My bohužel neznáme bod $X_0[x_0;y_0]$, proto v předchozí rovnosti místo souřadnic bodu $X_0[x_0;y_0]$ napíšeme neznámé *x*, *y*: $(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)=r^2$.
Co tento výraz znamená?
Pokud platí $X_1[x_1;y_1]\neq S[m;n]$ (vynulovala by se celá levá strana), jedná se o rovnici přímky, která je určena kružnicí $k([m;n];r)$ a bodem $X_1[x_1;y_1]$. Na této přímce určitě leží oba tečné body, které získáme po sestrojení tečen z bodu X_1 ke kružnici *k*. Tato přímka se nazývá **polára bodu X_1 vzhledem ke kružnici *k***.



Polára bodu $X_1[x_1;y_1]$ vzhledem ke kružnici $k([m;n];r)$ má rovnici
$$(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)=r^2.$$

Mnemotechnická pomůcka na zapamatování je stejná jako u rovnice tečny.

- Středová rovnice kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.
- Rozložíme dvojčleny: $(x-m)(x-m)+(y-n)(y-n)=r^2$.
- V každém součinu zaměníme jedno x za x_1 (a jedno y za y_1):
  $(x_1-m)(x-m)+(y_1-n)(y-n)=r^2$.

Tečné body jsou průsečíky poláry s kružnicí. Jakmile je vypočteme, můžeme napsat rovnice tečen pomocí rovnice pro tečnu.

Př. 2: Je dána kružnice $k([1;1];\sqrt{10})$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice k procházející bodem P pomocí rovnice poláry a rovnice tečny.

Hledání poláry

Nejdříve napíšeme středovou rovnici kružnice k: $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.

Rovnice poláry: $(x-1)(5-1)+(y-1)(-1-1)=10$

$4(x-1)-2(y-1)=10$

$4x-2y-12=0$

$2x-y-6=0$

Průsečíky poláry s kružnicí (tečné body)

Hledáme průsečíky poláry s kružnicí k: $2x-y-6=0 \Rightarrow y=2x-6$.

Dosadíme do rovnice kružnice: $(x-1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(2x-6-1)^2=10$.

$(x-1)^2+(2x-7)^2=x^2-2x+1+4x^2-28x+49=10$

$5x^2-30x+40=0$

$x^2-6x+8=0$

$(x-4)(x-2)=0$

Dopočítání druhé souřadnice tečných bodů a odpovídající tečny

- $x_1=4 \Rightarrow y_1=2x_1-6=2\cdot4-6=2 \Rightarrow$ tečný bod $T_1[4;2]$.
  Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(4-1)+(y-1)(2-1)=10$.

$3(x-1)+(y-1)=10$

$3x+y-14=0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

- $x_2=2 \Rightarrow y_1=2x_1-6=2\cdot 2-6=-2 \Rightarrow$ tečný bod $T_2[2;-2]$.

Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(2-1)+(y-1)(-2-1)=10$.

$(x-1)-3(y-1)=10$

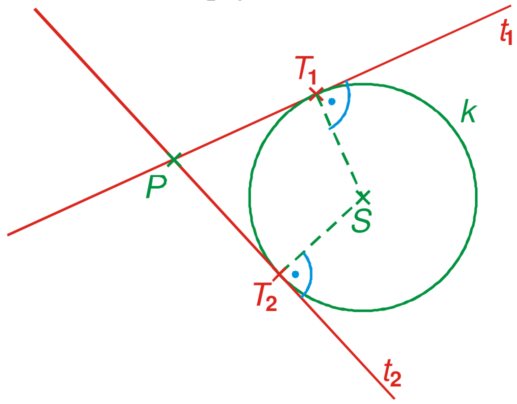
$x-3y-8=0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad způsobuje některým studentům problémy kvůli orientaci v tom, co je konstanta ze zadání a co je neznámá. V takovém případě pomůže sestavování rovnice poláry pomocí barevných křídy (barvy odpovídají barvám na obrázku). V textu není barevné rozlišení použito úmyslně.

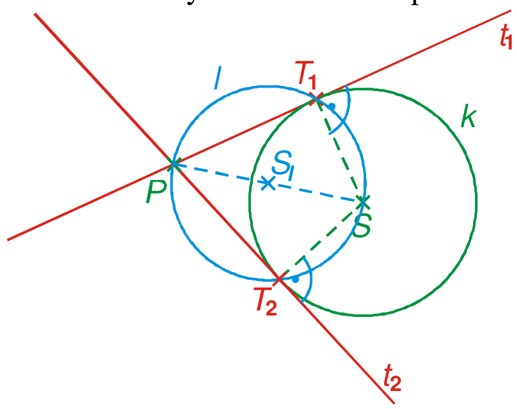
Pedagogická poznámka: Hodně studentů má problémy pojmout celý příklad a ve chvíli, kdy spočtou tečné body, neví jak dál.

Př. 3: Je dána kružnice $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice k procházející bodem P. Při řešení využij úhly, které svírá tečna se spojnicí tečného bodu a středu kružnice.

Tečna svírá se spojnicí tečného bodu se středem kružnice pravý úhel.



$\Rightarrow$ Tečné body můžeme nalézt pomocí Thaletovy kružnice l sestrojené nad průměrem PS.



Střed kružnice l = střed úsečky PS $\Rightarrow$ $S_l=S_{PS}\left[\frac{5+1}{2};\frac{-1+1}{2}\right]=[3;0]$.

Poloměr kružnice l: $r_1 = \frac{|PS|}{2} = \frac{\sqrt{(p_1 - s_1)^2 + (p_2 - s_2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

Středová rovnice kružnice $l([3;0];\sqrt{5})$: $(x-3)^2 + y^2 = 5$.

Středová rovnice kružnice $k([1;1];\sqrt{10})$: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$.

Získali jsme soustavu dvou kvadratických rovnic:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 5$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 6x = -4$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$$

$$x^2 + y^2 - 6x = -4$$
$$[\![1]\!] - [\![2]\!] \qquad -4x + 2y = -12 \Rightarrow y = 2x - 6$$

$x^2 + y^2 - 6x = x^2 + (2x-6)^2 - 6x = -4$

$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 - 6x = -4$

$5x^2 - 30x + 40 = 0$

Získali jsme stejnou rovnici jako v předchozím příkladě, kdy jsme tečné body hledali pomocí poláry $\Rightarrow$ dále už postupujeme stejně.

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

Dopočítáme druhé souřadnice tečných bodů a odpovídající tečny:

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 6 = 2 \cdot 4 - 6 = 2 \Rightarrow$ tečný bod $T_1[4;2]$.

  Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(4-1) + (y-1)(2-1) = 10$.

  $3(x-1) + (y-1) = 10$

  $3x + y - 14 = 0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

- $x_2 = 2 \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 6 = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \Rightarrow$ tečný bod $T_2[2;-2]$.

  Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(2-1) + (y-1)(-2-1) = 10$.

  $(x-1) - 3(y-1) = 10$

  $x - 3y - 8 = 0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

Př. 4: Petáková:
strana 130/cvičení 91 b)
strana 130/cvičení 92 b)
strana 130/cvičení 93 b)

Shrnutí: Tečnu kružnice můžeme najít pomocí počtu průsečíků parametricky nebo využitím speciálních vlastností.