

5.2.12 Vzdálenosti přímek

Předpoklady: 5211

Př. 1: Rozhodni, kdy má smysl uvažovat o vzdálenosti dvou přímek, a navrhní definici této vzdálenosti.

Vzdálenost přímek má smysl, když přímky nemají společné body \Rightarrow tedy pokud jsou buď rovnoběžné nebo mimoběžné.

Vzdálenost rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.

U mimoběžných přímek je situace složitější. Volíme různé dvojice bodů na přímkách \Rightarrow získáme různé vzdálenosti \Rightarrow hledáme takovou dvojici bodů, aby vzdálenost byla nejmenší (jako u všech ostatních definic) \Rightarrow body, které použijeme, leží na přímce, která je k oběma mimoběžkám kolmá (a zase ta kolmost).

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek p, q je délka úsečky PQ , kde body P, Q jsou popořadě průsečíky mimoběžek p, q s jejich kolmou příčkou.

Př. 2: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$. Urči vzdálenosti přímek.

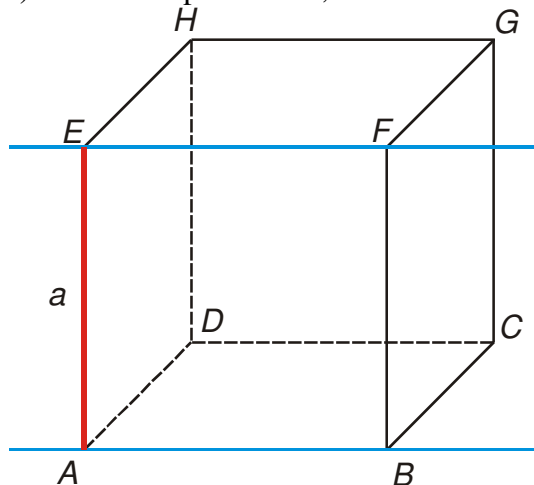
a) AB, EF

b) BC, EH

c) BF, EH

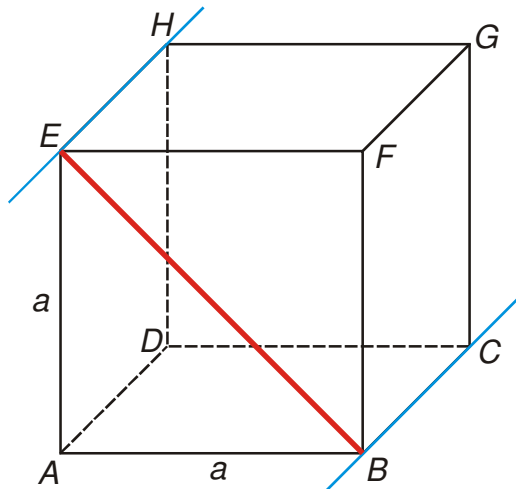
d) AH, BF

a) vzdálenost přímek AB, EF



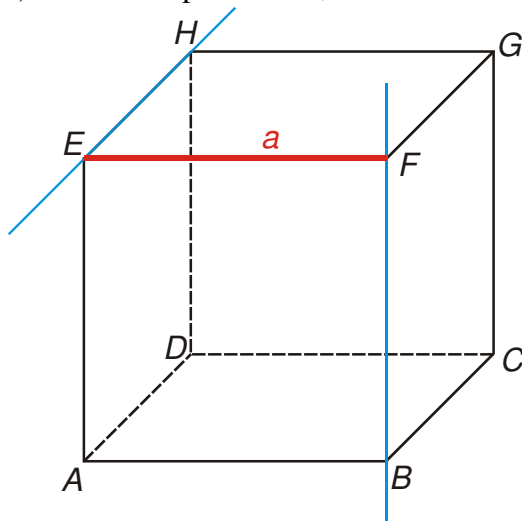
Přímky AB a EF jsou rovnoběžné \Rightarrow zvolíme libovolný bod přímky EF například bod E . Přímkou kolmou na přímkou AB a procházející bodem E je přímka AE \Rightarrow patou této kolmice je bod A \Rightarrow vzdálenost bodu E od přímky AB je rovna $a = 4 \text{ cm}$. Tato vzdálenost je také vzdáleností přímek AB a EF .

b) vzdálenost přímek BC, EH

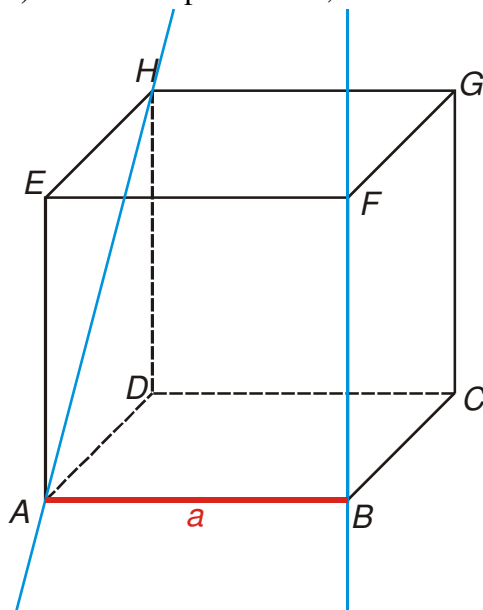


Dosadíme: $|BE| = a\sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} = 5,66 \text{ cm}$

c) vzdálenost přímek BF, EH



d) vzdálenost přímek AH, BF



Přímky BC a EH jsou rovnoběžné \Rightarrow zvolíme bod E . Přímkou kolmou na přímku BC a procházející bodem E je přímka EB \Rightarrow patou této kolmice je bod B \Rightarrow vzdálenost bodu E od přímky BC se rovná délce úsečky BC .

Z pravoúhlého trojúhelníku ABE :

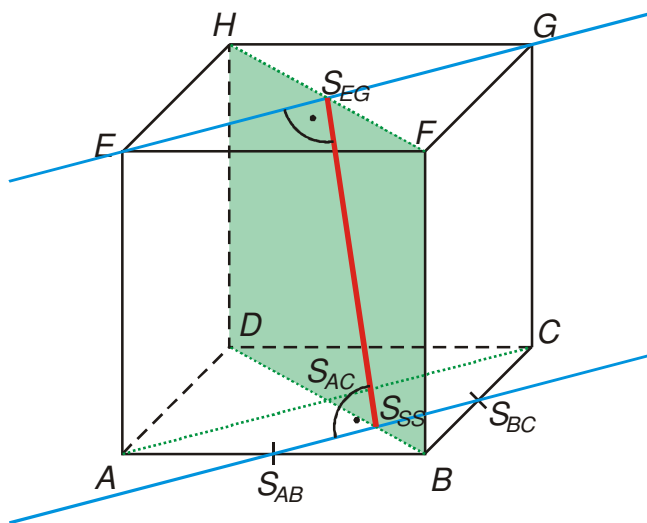
$$|BE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$|BE| = a\sqrt{2}$$

Přímky BF a EH jsou mimoběžné \Rightarrow hledáme jejich příčku, která bude na obě kolmá \Rightarrow najdeme úsečku EF , její délka je a \Rightarrow vzdálenost přímek BF, EH je $a = 4 \text{ cm}$.

Přímky BF a AH jsou mimoběžné \Rightarrow hledáme přímku, která je k oběma kolmá, takovou přímkou je přímka AB , vzdálenost přímek BF a AH se rovná délce úsečky AB a tedy 4 cm .

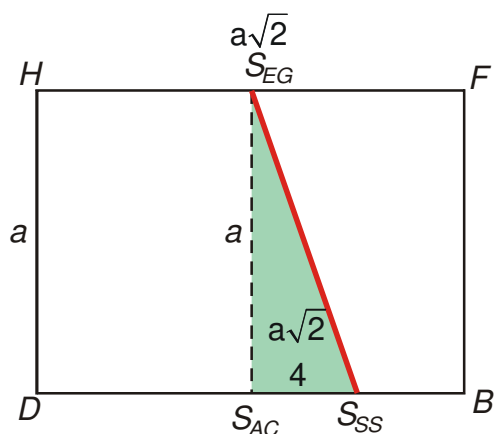
Př. 3: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$. Urči vzdálenost přímek EG , $S_{AB}S_{BC}$.



Přímky EG , $S_{AB}S_{BC}$ jsou navzájem rovnoběžné (body E, G, S_{AB}, S_{BC} tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníka) \Rightarrow hledáme vzdálenost libovolného bodu přímky EG od přímky $S_{AB}S_{BC}$ (nebo naopak).

Zvolíme například bod S_{EG} , patou kolmice na přímku $S_{AB}S_{BC}$, je bod S_{SS} (úsečka $S_{EG}S_{SS}$ je osou i výškou lichoběžníka). Její délku bychom mohli určit z lichoběžníka $S_{AB}S_{BC}GE$, jinou možností je nakreslit si obdélník $BFHD$, ve kterém oba body leží a vypočítat ji z něj.

Nakreslíme obdélník $BFHD$:



Úsečka $S_{EG}S_{SS}$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníku $S_{EG}S_{SS}S_{AC}$. Strana $S_{SS}S_{AC}$ je čtvrtinou úhlopříčky podstavy, její délka je tedy $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

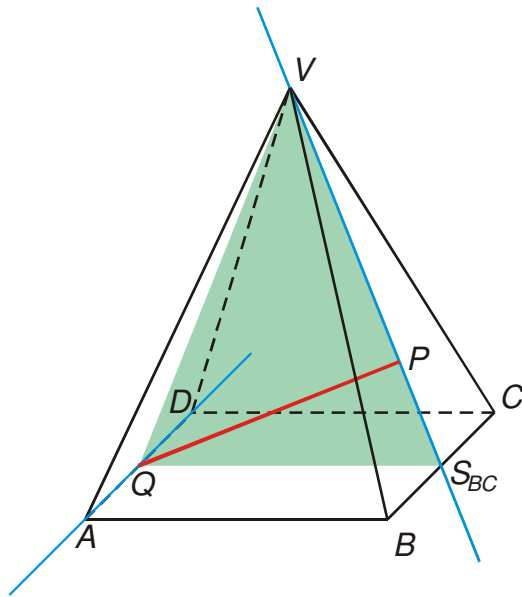
$$|S_{SS}S_{EG}|^2 = |S_{EG}S_{AC}|^2 + |S_{AC}S_{SS}|^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$|S_{SS}S_{EG}|^2 = a^2 + \frac{2a^2}{16} = a^2 + \frac{a^2}{8} = \frac{9a^2}{8}$$

$$|S_{SS}S_{EG}| = \frac{3}{\sqrt{8}}a = \frac{3}{2\sqrt{2}}a$$

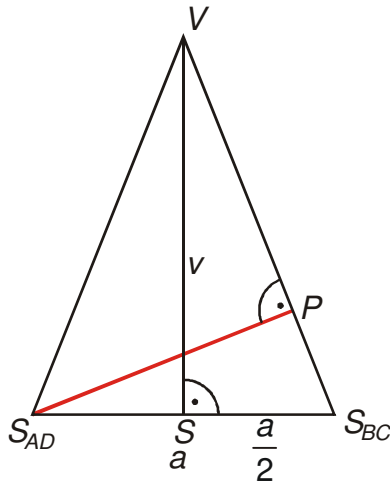
Dosadíme: $|S_{SS}S_{EG}| = \frac{3}{2\sqrt{2}}a = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot 4 = 4,24 \text{ cm}$.

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$, $|SV| = v = 5 \text{ cm}$. Urči vzdálenost přímek AD a $S_{BC}V$.



Hledáme kolmou příčku přímek AD a $S_{BC}V$.
Tato příčka určitě leží v rovině $S_{BC}S_{AD}V$ (tato rovina je kolmá na přímkou AD a zároveň obsahuje přímkou $S_{BC}V$).

Nakreslíme si trojúhelník $S_{BC}S_{AD}V$.



Délku strany $S_{BC}V$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $SS_{BC}V$:

$$|S_{BC}V|^2 = |SV|^2 + |SS_{BC}|^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{BC}V|^2 = v^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 + a^2}{4}$$

$$|S_{BC}V| = \sqrt{\frac{4v^2 + a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}$$

K výpočtu délky úsečky $S_{AD}P$ využijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow$

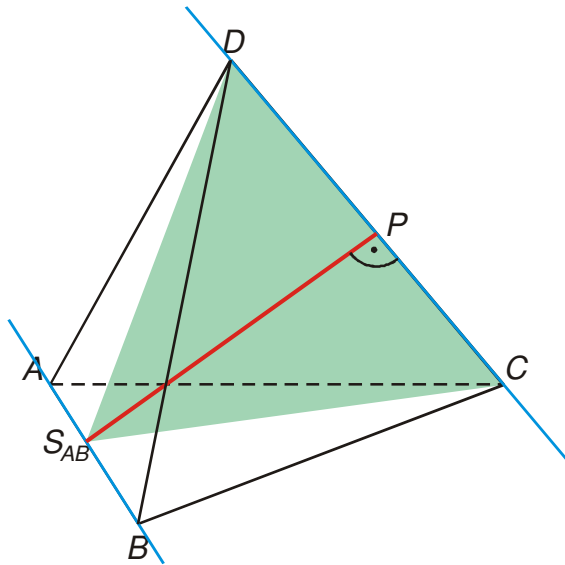
$a \cdot v_a = b \cdot v_b$. Dosadíme délky stran a výšek v trojúhelníku $SS_{BC}V$:

$$|S_{AD}S_{BC}| \cdot |SV| = |S_{BC}V| \cdot |PS_{AD}|$$

$$|PS_{AD}| = \frac{|S_{AD}S_{BC}| \cdot |SV|}{|S_{BC}V|} = \frac{a \cdot v}{\frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}} = \frac{2a \cdot v}{\sqrt{4v^2 + a^2}}$$

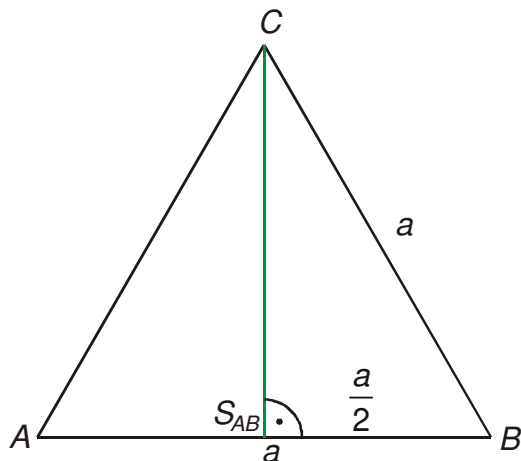
$$\text{Dosazení: } |PS_{AD}| = \frac{2a \cdot v}{\sqrt{4v^2 + a^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{4 \cdot 5^2 + 4^2}} \text{ cm} = 3,71 \text{ cm}$$

Př. 5: Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, $|AB| = a = 6 \text{ cm}$. Urči vzdálenost přímek AB a CD .



Hledáme kolmou příčku přímek AB a CD . Tato příčka určitě leží v rovině $S_{AB}CD$ (tato rovina je kolmá na přímku AB a zároveň obsahuje přímku CD).

Trojúhelník $S_{AB}CD$ je rovnoramenný, určíme si délku strany $S_{AB}C$ z trojúhelníku ABC .



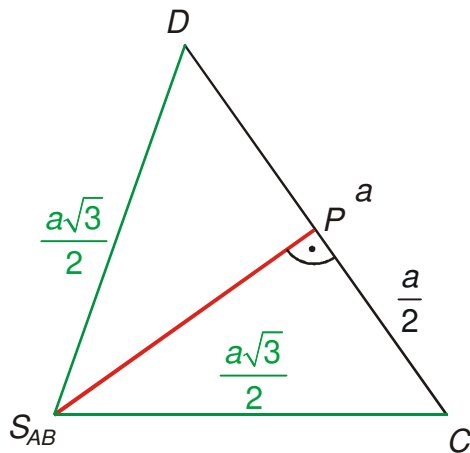
Délku výšky $S_{AB}C$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BC$:

$$|S_{AB}C|^2 = |BC|^2 - |S_{AB}B|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}C|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$|S_{AB}C| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Doplňme velikosti stran do trojúhelníka $S_{AB}CD$.



Délku výšky $S_{AB}P$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}CP$:

$$|S_{AB}P|^2 = |S_{AB}C|^2 - |CP|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}P|^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$|S_{AB}P| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Dosazení: $|S_{AB}P| = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 \text{ cm} = 4,24 \text{ cm}$

Př. 6: Petáková:
strana 93/cvičení 22 b) c)
strana 93/cvičení 23 b) c)

Shrnutí: U rovnoběžných a různoběžných přímek postupujeme stejně jako u rovin.
Vzdálenost mimoběžek určíme jako délku nejkratší (k oběma přímkám kolmé) příčky.