4.1.1 Opakování vlastností funkcí

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Tato hodina je zamýšlená jako první, druhá ve třetím ročníku. Podle toho, které úkoly necháte studenty řešit, může trvat jednu až dvě vyučovací hodiny.

Př. 1: Rozhodni, které z následujících předpisů můžeme považovat za funkce. U předpisů, které nejsou funkcemi, své rozhodnutí zdůvodni.
a) Každému reálnému číslu přiřadíme všechny jeho dělitele.
b) Studentům ve třídě přiřadíme jejich výšku.
c) Státům na světě přiřadíme počet jejich obyvatel.
d) Studentům ve třídě přiřadíme jejich otce.

a) Každému reálnému číslu přiřadíme všechny jeho dělitele.
Nejde o funkci. Přirozená čísla větší než jedna mají více dělitelů $\Rightarrow$ přiřazení by nebylo jednoznačné.

b) Studentům ve třídě přiřadíme jejich výšku.
Jde o funkci.

c) Státům na světě přiřadíme počet jejich obyvatel.
Jde o funkci.

d) Studentům ve třídě přiřadíme jejich otce.
Nejde o funkci. Studentům přiřazujeme člověka, ne číslo.

$\Rightarrow$ Funkce = jednoznačné (víme, kde skončíme, máme jedinou cestu) přiřazování, které končí u reálných čísel.

Definice funkce: Funkce na množině *A* je předpis, který každému prvku množiny *A* přiřazuje právě jedno reálné číslo.

V našem případě budou množinou *A* podmnožiny reálných čísel $\Rightarrow$ takovým funkcím se říká **funkce reálné proměnné.**

Množina *A* se nazývá **definiční obor** $D(f)$.
Množina všech čísel, která jsme přiřadili některému prvku z *A*, se nazývá **obor hodnot** $H(f)$ (matematicky – množina všech $y \in R$, ke kterým existuje aspoň jedno *x* z definičního oboru funkce *f* tak, že $y = f(x)$).

Př. 2: Je dána funkce $y = 2x$, kde $x \in N$. Urči $f(20)$ a $H(f)$.

$f(20) = 40$ (nebo-li pro $x = 20$ je $y = 40$)
$H(f)$ je množina všech sudých čísel.

Graf funkce – množina všech bodů $X\left[x; f(x)\right]$, kde $x \in D(f)$.

Př. 3: Rozhodni, které z následujících bodů jsou body grafu funkce *f*: $y = 2x$, kde $x \in N$: $X_1[2;4]$; $X_2[10;15]$; $X_3[-4;-8]$; $X_4[15;30]$.

$X_1[2;4]$ - je bodem grafu.

$X_2[10;15]$ - není bodem grafu, $f(10) = 20$.

$X_3[-4;-8]$ - není bodem grafu, $-4 \notin D(f)$.

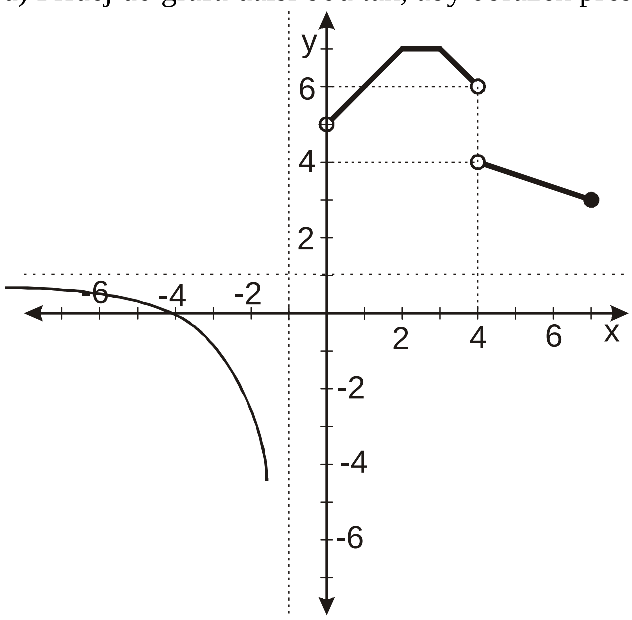
$X_4[15;30]$ - je bodem grafu.

Př. 4: Na obrázku je nakreslen graf funkce $f(x)$.

a) Urči $D(f)$ a $H(f)$ b) Zjisti, pro která *x* je hodnota funkce větší než nula.

c) Přidej do grafu další bod tak, aby obrázek zůstal grafem funkce.

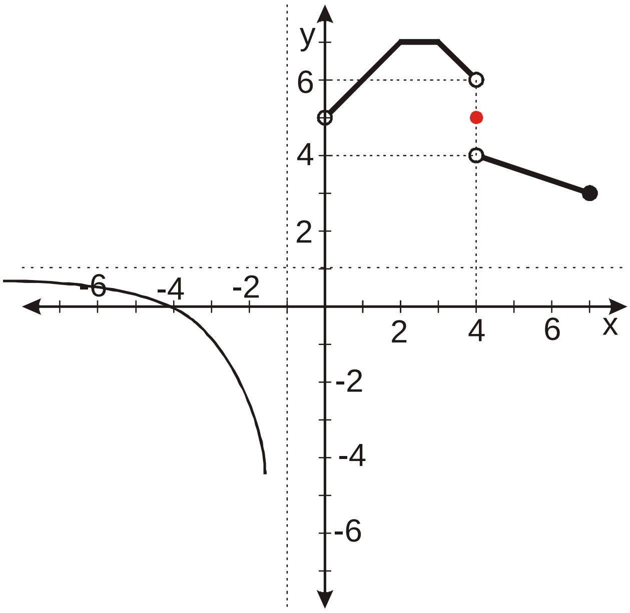
d) Přidej do grafu další bod tak, aby obrázek přestal být grafem funkce.



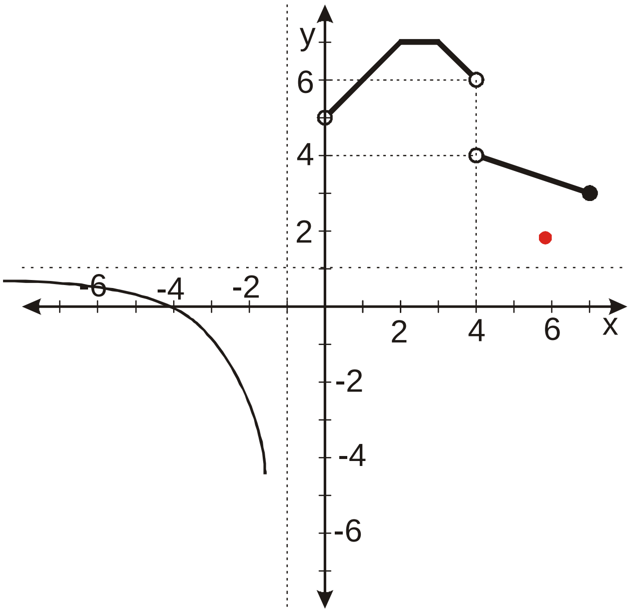
a) $D(f) = (-\infty;-1) \cup (0;4) \cup (4;7\rangle$ $H(f) = (-\infty;1) \cup \langle 3;4) \cup (5;7\rangle$

b) Hodnota funkce je větší než nula pro $x \in (-\infty;-4) \cup (0;4) \cup (4;7\rangle$ (body grafu nad osou *x*).

c) Bod musíme přidat tak, aby jeho *x*-ová souřadnice nepatřila do definičního oboru (pokud bychom vybrali *x* z definičního oboru, náležely by k němu dvě hodnoty – původní a nová) $\Rightarrow$ nekonečně mnoho možností.



d) Bod musíme přidat tak, aby jeho x-ová souřadnice patřila do definičního oboru (budou k ní naležet dvě hodnoty – původní a nová) $\Rightarrow$ nekonečně mnoho možností.



Př. 5: Přiřaď začátkům definic v levém sloupci odpovídající konce v pravém sloupci.

Funkce f se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$
Funkce f se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$
Funkce f se nazývá **nerostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$
Funkce f se nazývá **neklesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$

Funkce *f* se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$

Rostoucí funkce z větších čísel vyrábí větší hodnoty než z menších čísel $\Rightarrow$ u *y* zachovává nerovnost od *x*.

Funkce *f* se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$

Klesající funkce z větších čísel vyrábí menší hodnoty než z menších čísel $\Rightarrow$ u *y* obrací nerovnost od *x*.

Funkce *f* se nazývá **nerostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$

Nerostoucí funkce může klesat nebo stát na místě $\Rightarrow$ podobá se klesající funkci, liší se v tom, že hodnoty různých *x* mohou být stejné.

Funkce *f* se nazývá **neklesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:	Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) \leq f(x_2)$

Neklesající funkce může růst nebo stát na místě $\Rightarrow$ podobá se rostoucí funkci, liší se v tom, že hodnoty různých *x* mohou být stejné.

Pedagogická poznámka: Při diskusi nejdříve vyjasníme rozdíl mezi rostoucí a neklesající funkcí. Poté si všímáme, že podmínky v pravém sloupci se liší jednak směrem nerovnosti a jednak tím, že obsahují nebo neobsahují rovnost.

Př. 6: Napiš definici funkce rostoucí v intervalu J.

Funkce *f* se nazývá **rostoucí** v intervalu *J*, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in J$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.
Stejná definice jako pro rostoucí funkci, ale vybíráme pouze z intervalu *J*.

Př. 7: Definici prosté funkce převeď do nematematického jazyka.

Definice: Funkce *f* se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$x_1 \neq x_2$ znamená různá čísla *x*, $f(x_1) \neq f(x_2)$ znamená různé hodnoty získané z těchto čísel.

$\Rightarrow$ Funkce se nazývá **prostá**, právě když z různých *x* vyrábí různá $f(x)$ (neboli *y*).

Př. 8: Rozhodni, zda platí věta: „Je-li funkce rostoucí nebo klesající, je prostá.“

Platí.
Pokud je funkce rostoucí, každá následující hodnota musí být větší než všechny předchozí hodnoty $\Rightarrow$ pro různá *x* získáme různá *y*.

Př. 9: Uveď příklady navzájem inverzních funkcí.

Navzájem inverzní funkce mají prohozené *x* a *y* (otočené šipky přiřazování).
Například:

- $y = 2x$ je inverzní k $y = \frac{1}{2}x$.
- $y = \sqrt{x}$ je inverzní k $y = x^2$.
- $y = \log_a x$ je inverzní k $y = a^x$.

Př. 10: Je možné najít inverzní funkci ke každé funkci? Pokud ne, stanov podmínky, kdy to možné je.

Při obracení šipek se nesmí stát, aby od jednoho *x* vycházelo více než jedna (kvůli jednoznačnosti) $\Rightarrow$ před obracením se tam nesmělo víc šipek scházet $\Rightarrow$ každé *y* má jen jedno *x* $\Rightarrow$ funkce musí být prostá.

Poznámka: Inverzní funkce se značí f^{-1}, pro grafy funkcí *f* a f^{-1} platí, že jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Př. 11: Graf sudé funkce je osově souměrný s osou *y*, protože z *x* i –*x* vyrábí stejnou hodnotu *y*. Doplň načatou definici:
Funkce *f* se nazývá **sudá**, právě když zároveň platí:
a) Pro každé $x \in D(f)$, je také $-x \in D(f)$
b) …

b) Pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(-x)$ $\Rightarrow$ z opačných čísel vyrobíme stejnou hodnotu.

Př. 12: S pomocí předchozí definice sudé funkce sestav definici liché funkce. Jakou vlastnost má graf liché funkce?

Funkce *f* se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:
a) Pro každé $x \in D(f)$, je také $-x \in D(f)$
b) Pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = -f(-x)$ $\Rightarrow$ z opačných čísel vyrobíme opačné hodnoty
Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

Pedagogická poznámka: Bohužel se často objevuje: b) Pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) \neq f(-x)$. Čiší z toho nepochopení.

Př. 13: Uveď příklady sudých a lichých funkcí.

Sudé: $y = x^2$, $y = |x|$, $y = a$, $y = x^n$, kde *n* je sudé.

Liché: $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^n$, kde *n* je liché.

Pedagogická poznámka: Smyslem příkladu je, aby si studenti uvědomili, že pojmenování vlastností funkcí souvisí s druhem mocnitele.

Př. 14: Funkce se nazývá shora omezená, když existuje číslo, které je větší než všechna *y* z jejího oboru hodnot. Funkce má maximum, když mezi *y* existuje jedno, které je větší nebo rovno všem ostatním. Doplň následující definice:

Funkce *f* ………, právě když existuje reálné číslo *d* takové, že pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \geq d$.
Funkce *f*………., právě když pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \geq f(a)$.
Funkce *f*………., právě když pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \leq f(a)$.
Funkce *f* ………, právě když existuje reálné číslo *d* takové, že pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \leq d$.

Funkce *f* se nazývá zdola omezená, právě když existuje reálné číslo *d* takové, že pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \geq d$.

Číslo, se kterým srovnáváme, nemusí být z oboru hodnot, je menší než (nebo rovno) všechny hodnoty.

Funkce *f* má v bodě *a* minimum, právě když pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \geq f(a)$.

Číslo, se kterým srovnáváme, patří do oboru hodnot a je menší než (nebo rovno) všechny hodnoty.

Funkce *f* má v bodě *a* maximum, právě když pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \leq f(a)$.

Číslo, se kterým srovnáváme, patří do oboru hodnot a je větší než (nebo rovno) všechny hodnoty.

Funkce *f* se nazývá shora omezená, právě když existuje reálné číslo *d* takové, že pro všechna $x \in D(f)$ je $f(x) \leq d$.

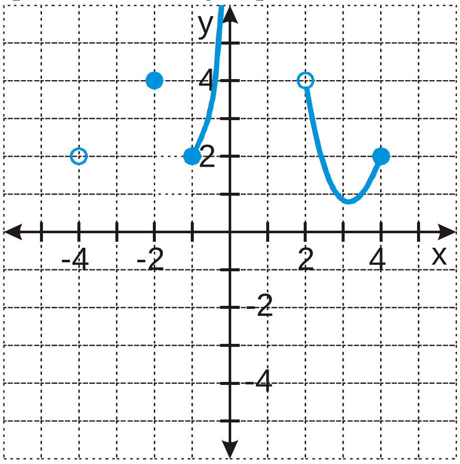
Číslo, se kterým srovnáváme, nemusí být z oboru hodnot, je větší než (nebo rovno) všechny hodnoty.

Př. 15: Dokresli graf funkce tak, aby platilo $D(f) = R$ a zároveň:

a) funkce byla shora omezená b) funkce měla minimum

c) funkce byla lichá d) funkce byla sudá

Ve všech případech nakresli jedno řešení a zformuluj podmínku, kterou musí splňovat všechny „správné“ funkce.



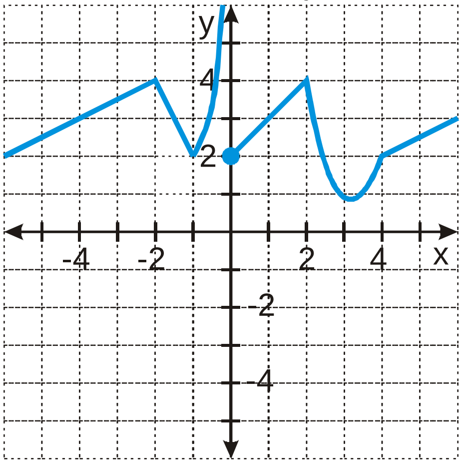
Nejdříve je dobré si uvědomit, že prázdné kolečko o souřadnicích $[-4;2]$ nic neznamená, neurčuje pro funkci žádnou uspořádanou dvojici a můžeme ho ignorovat.

a) Funkce je shora omezená.

Není možné graf doplnit na graf shora omezené funkce, pro *x* blížící se nule rostou hodnoty nade všechny meze.

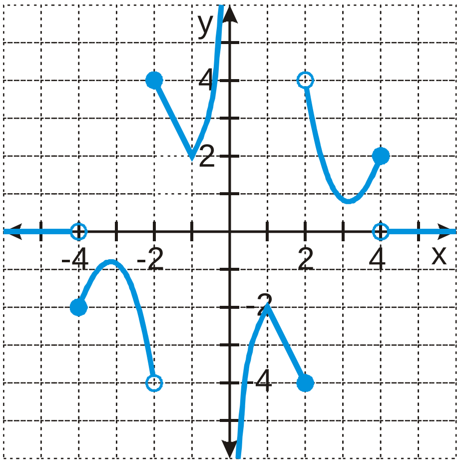
b) Funkce má minimum.

Obrázek funkce musí obsahovat „nejnižší bod“. Můžeme za něj zvolit nejnižší místo „obloučku“ nebo si nový bod dokreslit sami. Všechny další body musí být výše.

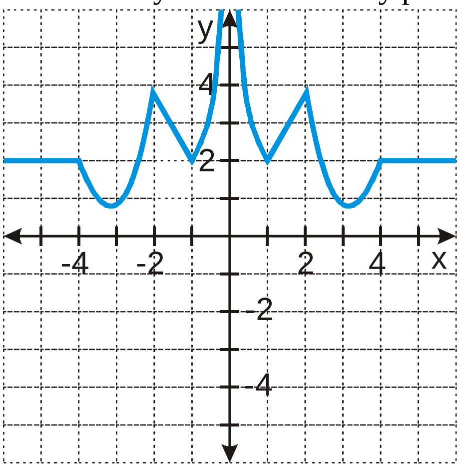


c) Funkce je lichá.

Graf musí být středově souměrný podle bodu $[0;0]$.



d) Funkce je sudá.
Graf musí být osově souměrný podle osy *y*.



Shrnutí: Vlastnosti, které jsme u funkcí určovali loni, mají funkce i letos.